# Noter til Komplekse tal i elektronik.

Eksempler på steder, hvor der bruges kondensatorer og spoler i elektronik:

Equalizer

Højtaler

Bas, lavpasled, Mellemtone, Diskant

Selektive forstærkere.

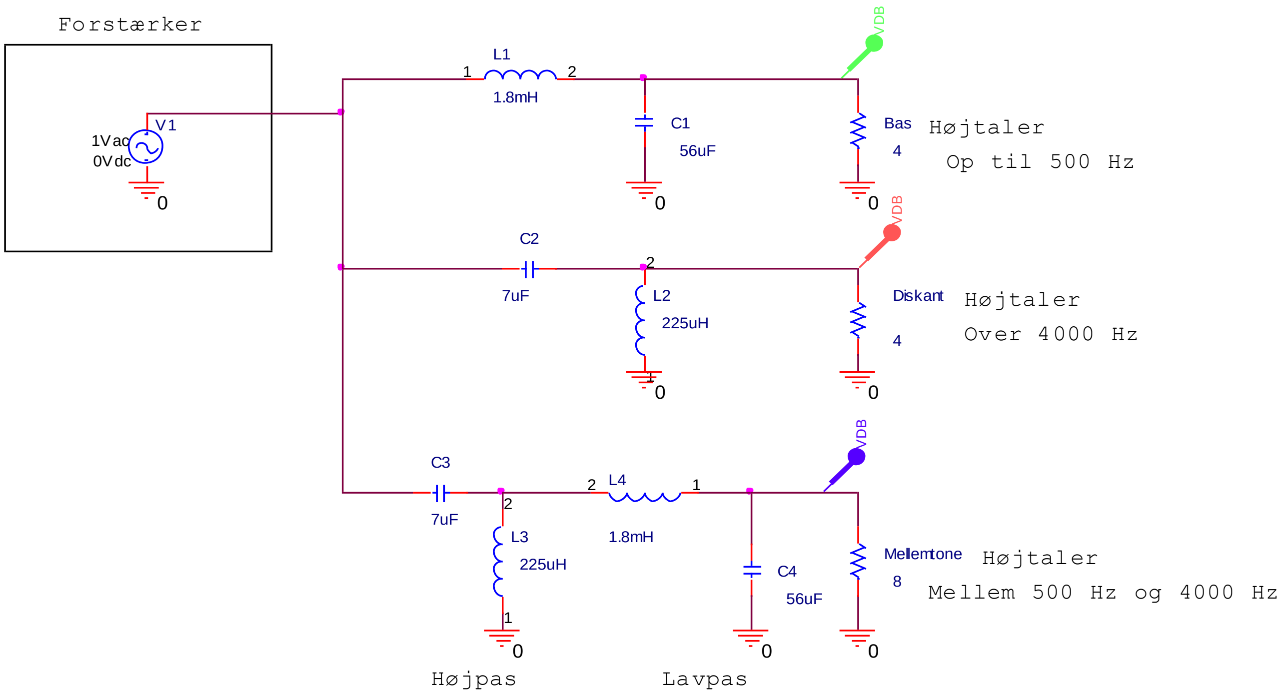
Når der er kondensatorer / spoler involveret i et AC-kredsløb, opstår der fasedrejning,

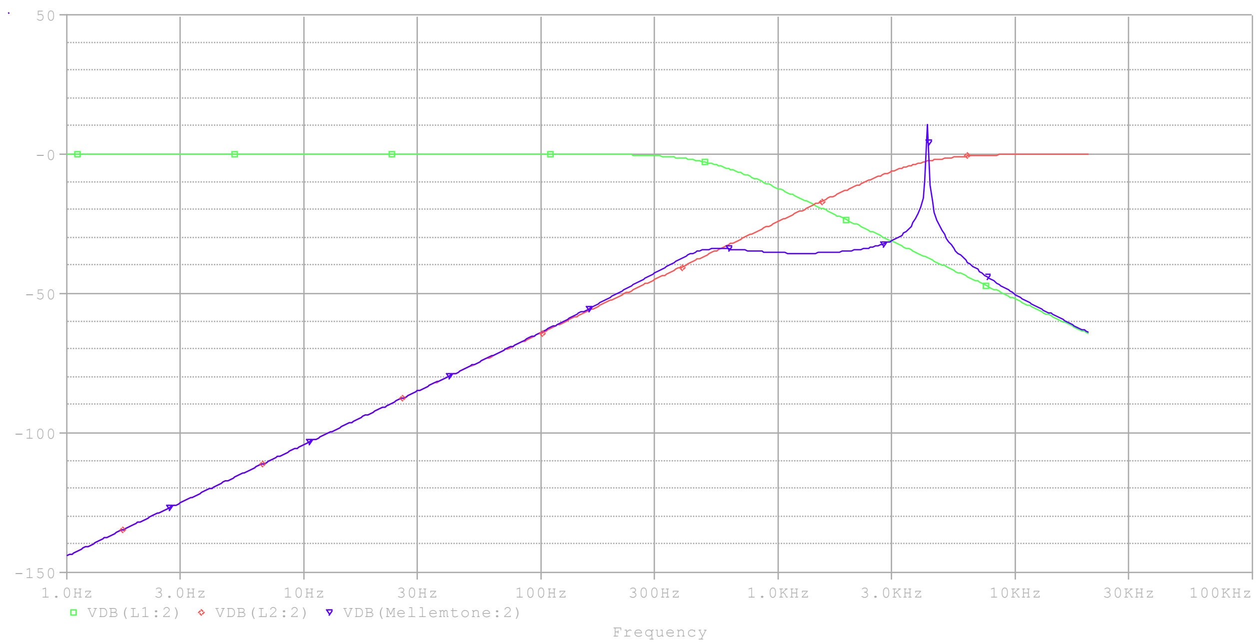
Komplekse tal er ideelle til at beskrive forholdene ved fasedrejning.

Og ORCAD er eminent til at analysere analoge kredsløb.

Se kompendiet om Komplekse tal !!!

# Delefilter:


Forstærker
V1
1Vac
0Vdc
0
L1
1
2
1.8mH
C1
56uF
Bas
4
Højtaler
Op til 500 Hz
C2
7uF
L2
225uH
Diskant
4
Højtaler
Over 4000 Hz
C3
7uF
L3
225uH
L4
1.8mH
C4
56uF
Mellemtone
8
Højtaler
Mellem 500 Hz og 4000 Hz
Højpas
Lavpas
VDB


50
-0
-50
-100
-150
1.0Hz
3.0Hz
10Hz
30Hz
100Hz
300Hz
1.0KHz
3.0KHz
10KHz
30KHz
100KHz
VDB(L1:2)
VDB(L2:2)
VDB(Mellemtone:2)
Frequency

X-aksen er logaritmisk. Y = dB, $20 \cdot \log_{10}\left(\frac{Uout}{Uin}\right)$

frekvensafhængig kredsløb

Kondensator, Spole, ikke modstand !

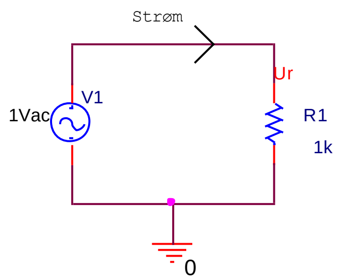
Når vi har noget, der er frekvensafhængig, har vi også fasedrejning. !!!

# Modstand:

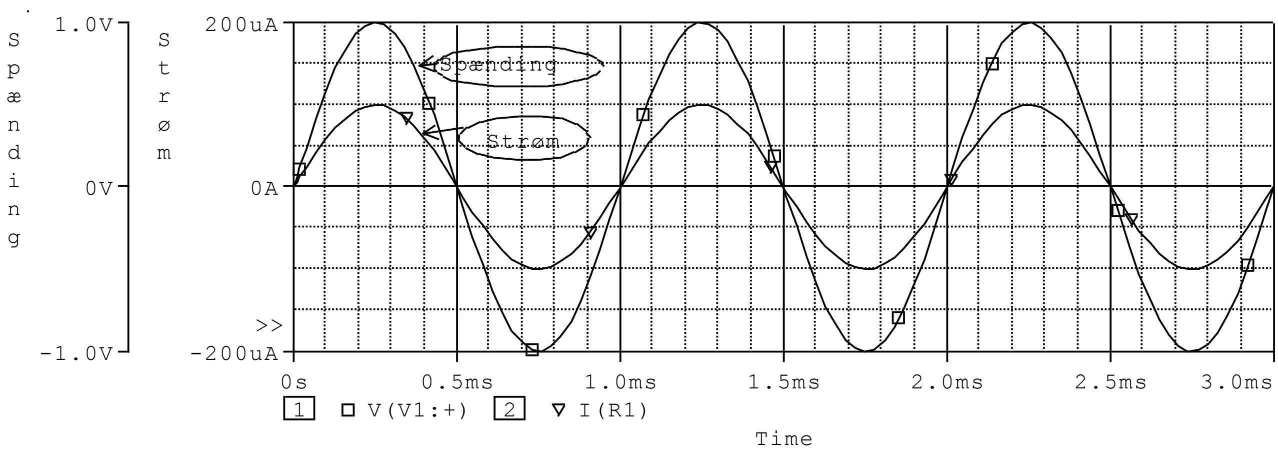
Tilsluttes en sinus - spændingsgenerator direkte til en **modstand**, findes at der går en vekselstrøm.

Generatoren pumper ladningerne frem og tilbage. Det er de samme elektroner, der skubbes. Og de løber kun ganske kort, under 1 mm. Men alle elektroner skubber til de næste osv.

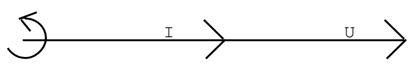
Dvs. at når spændingen er positiv, er strømmen positiv, og når spændingen er negativ, er også strømmen negativ. Når spændingen er størst, vil strømmen også være størst, og i spændingens nulgennemgang vil også strømmen være nul.




Man siger, at strøm og spænding er i fase. De er der samtidig.




***Plot af Spænding og strøm i fase Fasedrejning $\varphi = 0$. Det ses, at frekvensen er 1 KHz, dvs. 1 hel svingning på 1 mS***

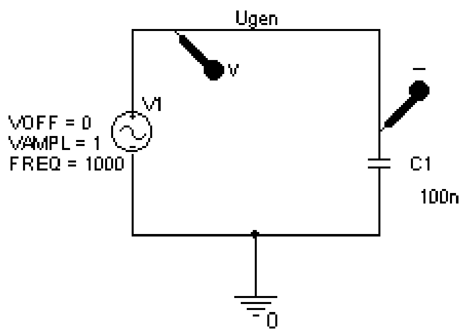



Vinklen mellem spænding og strøm kaldes Fi, φ. Vinklen er 0 grader.

# Kondensator

Sættes en sinus spændingsgenerator, uendelig god, direkte til en kondensator, vil kondensatorens spænding til enhver tid være den sammen som generatorens. Der er ingen modstand til at bremse ladningerne / strømmens flow, så opladningen af kondensatoren sker lynhurtigt. Der er uendelig strøm til rådighed.

$U_C$ er altså lig $U_{gen}$. Altså når $U_{gen}$ er i max, er $U_C$ også i max.




## *Generatoren forbundet til en kondensator.*

Men kondensatoren skal jo oplades / aflades for at spændingen over den kan ændres. Og til opladning / afladning kræves, at der flyttes elektroner / ladninger, at der går en strøm..

Dvs. at hvis spændingen over kondensatoren ændres, må der gå en strøm. Og hvis spændingen skal ændres meget på kort tid, må der en stor strøm til.

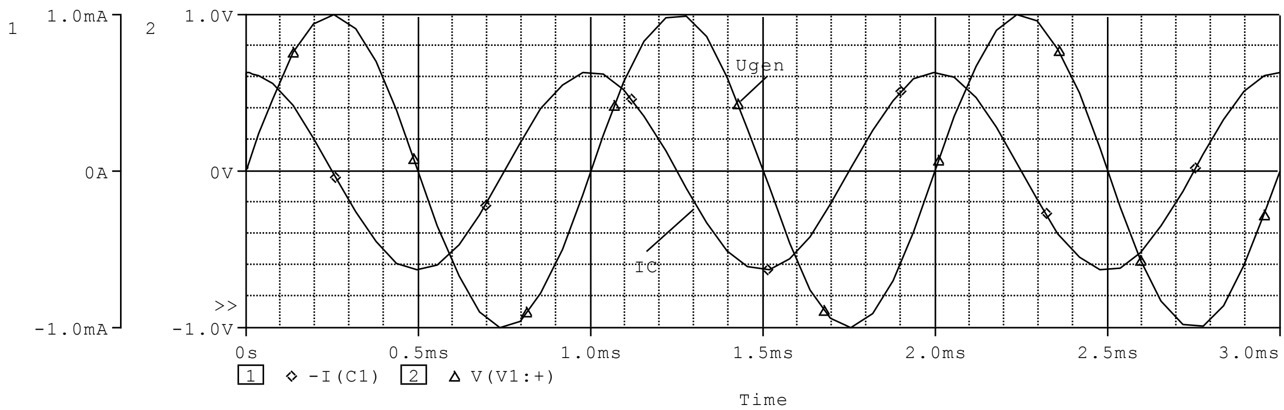
Det betyder også, at hvis der ikke ændres på spændingen over kondensatoren, går der ingen strøm.

Dette sker jo hvis hældningen på den påtrykte sinus er 0. dU/dt = 0. Og dette sker netop i toppunktet og i bunden.

Altså hvis sinusspændingen er i top, vil strømmen $I_c$ være 0.

Tilsvarende når generatorspændingen $U_C$ krydser 0, vil spændingensændringen = hældningen dUc/dt være størst, og dermed må spændingsændringen over kondensatoren også være størst. Og altså også strømmen $I_c$. der går til eller fra kondensatoren.

På en graf ser det ud som på følgende:




*Graf for spænding og strøm i en kondensator. Φ = 90 grader*

Grafen for den påtrykte spænding er markeret med trekanter, strømmen med firkanter.

Efter et spændings-toppunkt falder spændingen, og kondensatoren må følgelig aflades. Altså er strømmen på vej ud af kondensatoren, hen mod generatoren. Hvis strømmen hen til kondensatoren regnes positiv ses, at efter et spændingstoppunkt er strømmen til kondensatoren negativ.

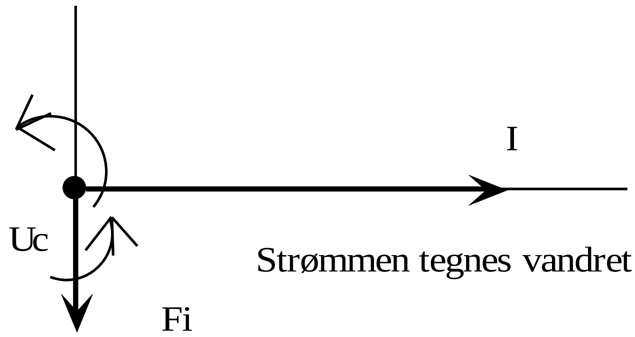
Og i spændingens nulgennemgang er dens hældning størst, positiv eller negativ, og derfor er spændingsændringen størst og der skal flyttes flest elektroner pr tidsenhed ud af eller ind i kondensatoren. Følgelig må strømmen her være størst.

Altså må der, som der ses på grafen, være en forskydning mellem strøm og spænding på 90 grader. Og strømmen er 90 grader før spændingen. E hel svingning er jo 360 grader.

Tegnes en graf af Uc og Ic som ovenfor, med tiden ud ad X-aksen, vil først Ic krydse 0 [V] på vej ned, og 90 grader senere krydser Uc 0 [V] på vej nedad. Uc er altså 90 grader bagefter Ic, eller Ic er 90 grader foran Uc. Fasedrejningen FI $\varphi = 0$.

For at huske at strømmen er foran, kan anvendes navnet ELICE.  Omkring C`et ses at ”I” er før ”E”. Egentlig bruges U for spændingen, men tidligere brugtes E.

På vektorform ser det således ud. Vektorerne drejer venstre om. Man står et sted og venter, og den første vektor, der ankommer, er strømmen. 90 grader efter kommer spændingen. Fasedrejningen eller faseforskydningen er 90 Grader.




# Strømmen er 90 grader forud for den påtrykte spænding.

I dagligdagen kender vi fx faseforskydning fra årstiderne. Det er ikke koldest ved 21 dec, der er den korteste dag, og ikke varmest til Sct. Hans. Temperaturen er forskudt bagud et par måneder. Og vores døgnrytme er forskudt. Vi står jo ikke op og udnytter de første lyse timer. Og vi er vågne til sent aften.

**Kondensatorens modstand.**

En kondensators modstand ved DC er uendelig, hvis man ser bort fra lækstrømme.. Når den er opladt, går der jo ikke mere strøm, og modstanden afgør, hvor stor strømmen er ved en given spænding.

Ved AC bliver kondensatoren hele tiden opladt og afladt. Dvs. der går en strøm til og fra kondensatoren.

Ved samme spænding er det samme ladningsmængde, der skal transporteres til og fra kondensatoren, - uanset frekvens. Ladningerne ankommer til den ene plade, og ophobes, samtidig med at der forlader samme mængde ladninger fra den anden plade. Generatoren pumper blot ladninger rundt i kredsløbet.

Ved højere frekvens skal samme ladningsmængde transporteres hurtigere frem og tilbage fra kondensatoren for at opnå samme spænding, idet $U_C = \frac{Q}{C}$. Kondensatorens spænding er lig med dens ladning Q delt med kondensatorens størrelse i Farad.

En hurtigere ladningstransport er ensbetydende med en større strøm. Altså ved stigende frekvens virker kondensatoren som en mindre modstand.

En kondensators modstand ved vekselspænding kan beregnes med : $X_C = \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot c} \left[\Omega\right]$

**<u>Hvorfor kan strøm gå gennem en kondensator ?</u>**

En kondensator er to ledere ( plader ) adskilt af et dielectricum ( en isolator). Derfor kan strøm ikke passere gennem den. Men hvis strømmen er AC kan det observeres, at noget ækvivalent til strømmen passerer.

AC strøm vender dets retning med en given frekvens. Resultatet er, at polariteten af spændingen målt ved input-terminalerne på kondensatoren svinger fra positive til negative spændinger.

Hvis den påtrykte spænding går negativ, bliver elektroner opmagasineret på den kondensator-plade, spændingen er tilsluttet. Og da elektroner frastøder andre elektroner, bliver elektroner frastødt på den anden plade.

Hvis spændingen går positiv, trækkes elektroner væk fra pladen, hvilket betyder, at det lades op positiv, og dette tiltrækker elektroner til den modsatte plade.

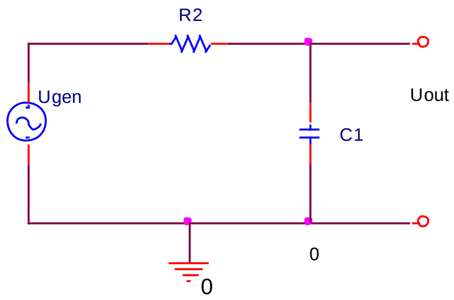
Man kan også sige, at elektroner løber til den ene side af en kondensator, og andre forlader den anden side, efterladende huller.

Den øjebliks-energi, der til enhver tid er opmagasineret i en kondensator, er $W_C = \frac{1}{2} C U^2$.

# <u>RC-LED</u>

Forbindes nu en serieforbindelse af en modstand og en kondensator, - et RC-led, - til generatoren haves en mellemting mellem en ren ohmsk belastning og en kapacitiv belastning. Alt afhængig af frekvensen.

Den påtrykte spænding deler sig mellem modstanden og kondensatoren, og idet kondensatorens modstand er frekvensafhængig, må der også være et frekvensafhængig forhold mht. spændingsdelingen.




# ***Generatoren påtrykker RC-leddet en sinus-spænding.***

Strømmen I er ens i de to komponenter. Når der går en strøm i den ene, går der også strøm i den anden. Der kan ikke ophobes ladninger ! Strøm ophobes ikke.

Størrelsen af strømmen I er afhængig af modstanden, generatoren ser ind i. Og modstanden er igen afhængig af generatorens frekvens, idet kondensatorens modstand Xc jo er frekvensafhængig.

Hvis modstanden ikke er ren ohmsk, kaldes den for en **impedans**.

Ved ren ohmsk belastning ville strøm og spænding være i fase, dvs. at når spændingen er på sit højeste, er strømmen det også. Og når spændingen er 0, er strømmen også 0. Fasedrejningen Fi $\varphi$ er 0 grader. ( vist tidligere )

I vektordiagrammet afsættes ved ren ohmsk belastning både strøm og spænding ud af samme akse vandret til højre og vinklen mellem dem er 0 grader.

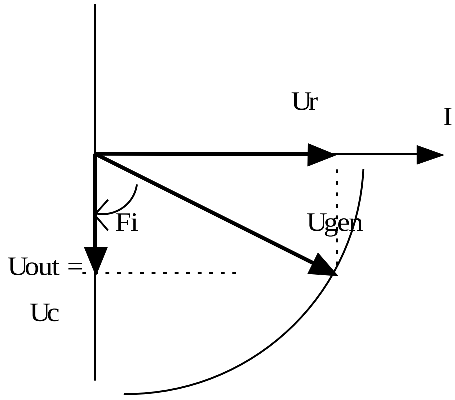
Men nu er der en **"ikke ohmsk"** komponent med. Dvs at strøm og spænding ikke længere er i fase.

I et vektordiagram – se nedenfor - afsættes den, der er "ens", altid vandret til højre. Det er i en serieforbindelse strømmen, der er ens – eller fælles. Strømmen går jo gennem begge komponenter samtidigt.

Spændingen over modstanden $U_R$ er altid i fase med strømmen og afsættes ud ad X-aksen i fase med strømmen. I kondensatoren er strømmen $I_C$ 90 grader foran spændingen $U_C$ - og det betyder jo også, at spændingen er bagud for strømmen. 90 grader bagud.

Vektordiagrammet drejer mod uret. Man "står" så et sted, og ser, hvad der først kommer forbi. Derfor afsættes $U_C$ lodret nedad, altså 90 grader bagud.

Generatorspændingen $U_{Gen}$ er den geometriske sum af $U_R$ og $U_C$. Strømmen er altså foran den påtrykte generatorspænding. $U_{OUT,}$ der er lig $U_C$, er bagud i forhold til generatorspændingen, altså haves en faseforskydning bagud eller "en negativ faseforskydning". Faseforskydningen er vinklen mellem $U_{gen}$ og $U_{OUT}$ og kaldes for "Fi".




*Vektordiagram for $U_R$, $U_C$ og $U_{GEN}$ i et RC-led.*

$U_{gen}$ er den påtrykte spænding. Dennes længde ændres ikke ved forskellige frekvenser. Den bestemmes jo af generatoren. Men fordelingen af spændingen over R og $X_C$ ændres ved forskellige frekvenser. Uc bliver mindre ved højere frekvenser. Dvs. at vektoren $U_{gen}$ vandrer / drejer fra næsten lodret cirkelformet op mod vandret mod højre omkring origo ved stigende frekvens.

Ved meget lave frekvenser er $X_C$ meget stor, og næsten hele generatorspændingen kan måles over kondensatoren. Modstandens værdi er lille i forhold til $X_C$. Vektoren $U_{gen}$ er næsten lodret. I må være lille !

Stiger frekvensen, falder $X_C$, og vektoren $U_{gen}$ drejer mod højre. Spændingen over $X_C$ falder mens den stiger over R. I må også blive større.

Ved en bestemt frekvens er $X_C$ faldet til samme værdi som modstanden. $X_C$ og R er lige store, og derfor også $U_C$ og $U_R$. I er jo den samme i både modstand og kondensator. Sammenlagt vektorielt er de lig med den påtrykte spænding $U_{gen}$. $U_{gen}$ må gå 45 grader ned mod højre.

Altså ses, at jo større $U_C$ er i forhold til $U_R$, jo mindre vinkel. Den største $U_C$ fås ved den laveste frekvens, hvor modstanden i kondensatoren jo er meget stor. Jo mere frekvensen stiger, jo mindre bliver modstanden i kondensatoren, og jo mindre bliver $U_C$ - og vinklen Fi stiger.

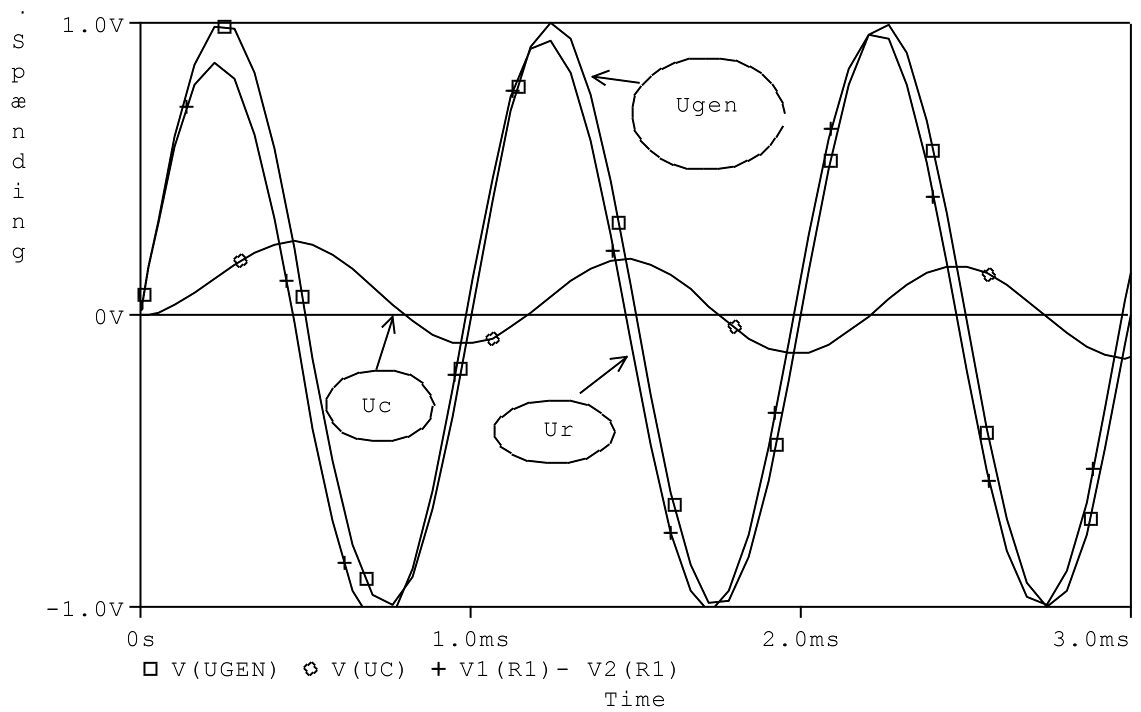
Den frekvens, hvor Xc er faldet til samme værdi som modstanden, kaldes overgangsfrekvensen, eller knækfrekvensen, eller $f_0$.

Ved overgangsfrekvensen eller knækfrekvensen $f_0$ er kondensatorens modstand faldet til samme værdi som modstandens værdi, og $U_C$ og $U_R$ er lige store, og vinklen vil være 45 grader.

$U_{out}$ ses i vektordiagrammet at være $U_{gen}$ gange Cos (45), som også er $\frac{U_{Gen}}{\sqrt{2}}$, eller $U_{gen}$ gange 0,707.

$$\text{tg(Fi)} = \frac{Modstående}{Hosliggende} = \frac{U_R}{U_C} = \frac{R}{X_C}$$

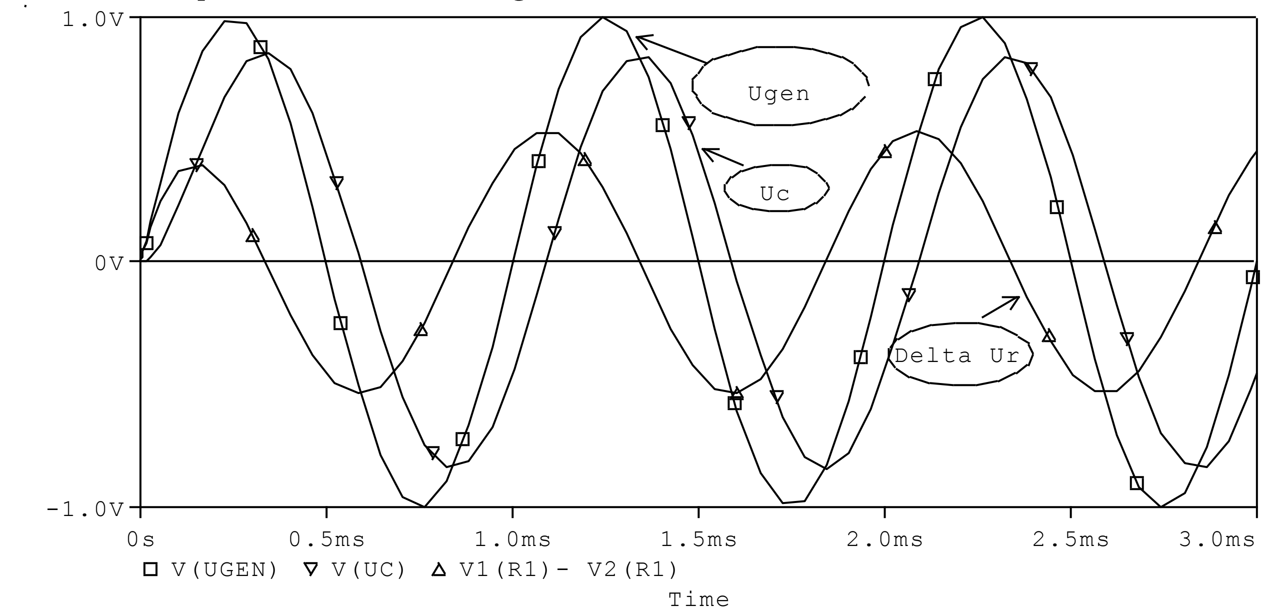
$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{U_R}{U_C}\right) = tg^{-1}\left(\frac{R}{X_C}\right)$$




***RC-led, R = 10 KOhm, C = 100 nF, Det ses, at Uc + Ur = Ugen.***

Ved valgte komponenter og frekvens er $\Delta U_{X_C}$ lav, som det ses. $\Delta U_R$ er næsten lig Ugen.

Med andre komponentværdier findes følgende:




***RC-led, R = 10 KOhm, C = 10 nF, Det ses, at summen af Uc og Ur er lig Ugen. Kondensatoren er nu kun 10 nF, dvs. at en større del af spændingen nu ligger over kondensatoren.***

Ved hjælp af to grafer, kaldet et Bodeplot, får man et fint billede af situationen ved forskellige frekvenser. Den ene graf er for systemets forstærkning, dvs. Uout / Uin. Forstærkningern er ganske vist under 1, dvs. en dæmpning, men kan godt opfattes som en forstærkning.

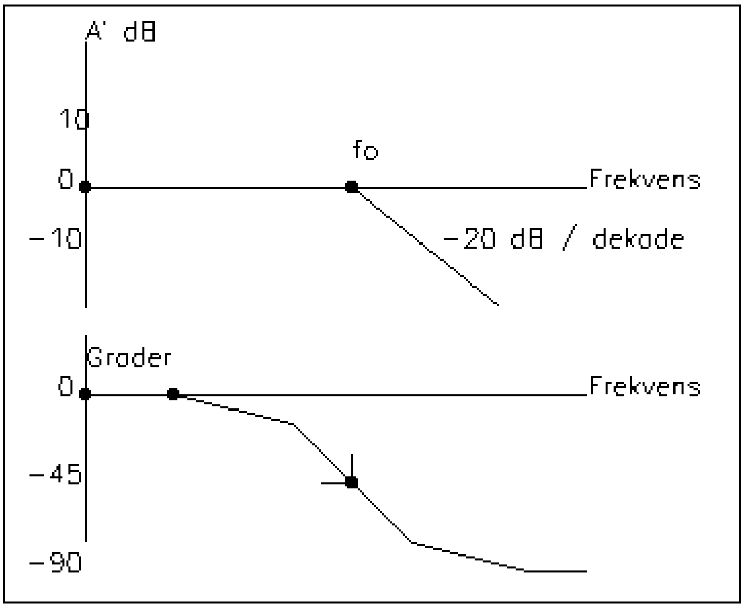
Grafen har logaritmisk X-akse, og forstærkningen afbildes i dB (decibel). Forstærkningen i dB findes som $dB = 20 \cdot \log_{10} \frac{Uout}{Uin}$

Den anden graf viser fasedrejningen, igen med frekvensen ( logaritmisk ) ud ad X-aksen.

Sammenlignes grafen ovenover med Bodeplot – skitsen nedenfor ses, at ved $f_{0,}$ hvor vi har knækket, er forstærkningen iflg. ovenstående faldet til 0,707 gange $U_{gen}$ selv om det ikke tegnes. Der tegnes med rette linier.

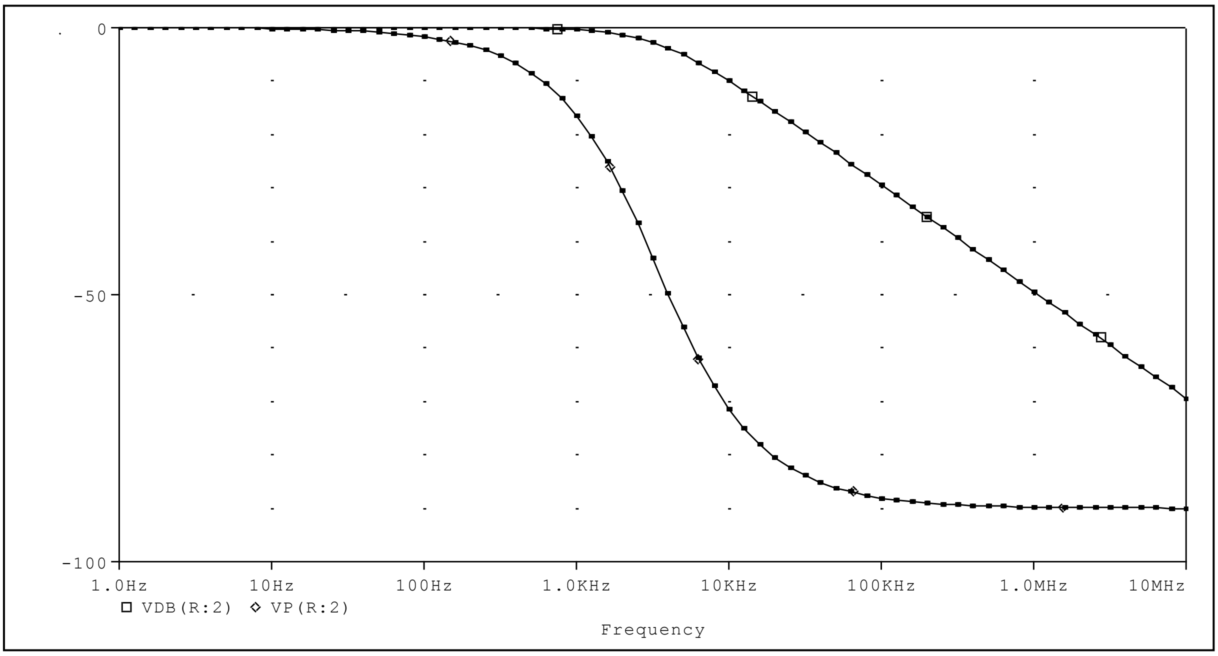
0,707 omregnet til dB er -3,01 eller blot -3 dB. I knækket siges også, at man har nået 3 dB grænsen.

$$dB = 20 \cdot \log_{10}(A') = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_{OUT}}{U_{Gen}}\right)$$




*Bodeplot skitse af Uout i forhold til Uin ( = forstærkning ) og tilhørende fasedrejning.*

Ovenstående skitse vises på næste graf tegnet med et simuleringsprogram:



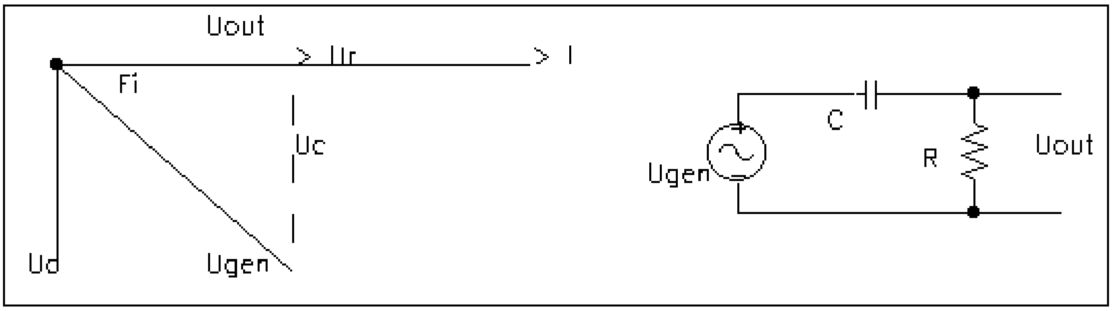

*Bodeplot og fasedrejning fra simuleringsprogrammet ORCAD.*

VDB, ($U_{dB}$) markeret på grafen med firkanter, er et Bodeplot af forstærkningen, og VP, $U_{Phase}$, markeret med firkanter på spidsen, er udgangsspændingens fase.

# Højpas-led ( CR-led )

I et højpasled er igen strømmen I ens. Det er jo en serieforbindelse.

$U_R$ er i fase med strømmen, og $I_C$ 90 grader foran $U_C$. Ugen ,som er den geometriske sum af $U_R$ og $U_C$, er bagud i forhold til strømmen, dvs. strømmen er foran $U_{gen}$. $U_{out}$ tages over $U_R$ og er således foran generatorspændingen. Fi er altså positiv og er vinklen fra $U_{gen}$ til $U_R$.



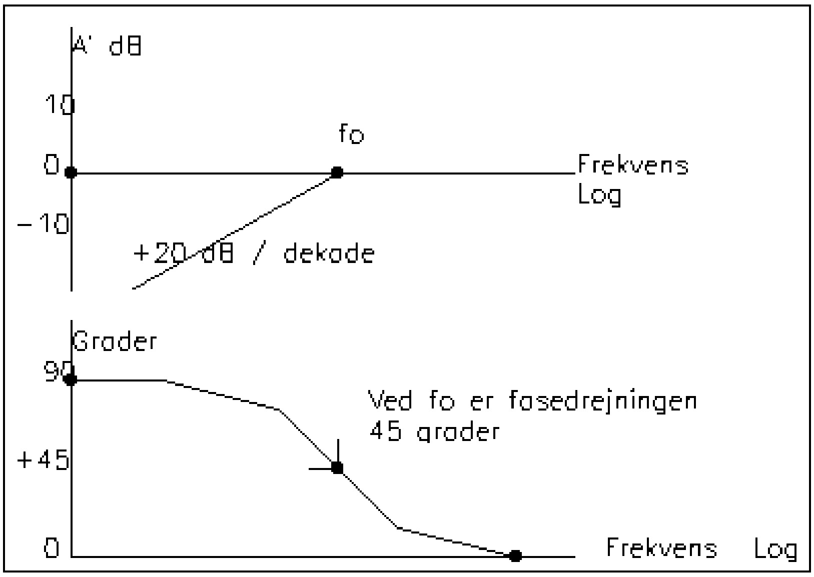

***Vektordiagram for et CR-led. Uout er foran generatorspændingen.***

Det ses af vektordiagrammet at jo højere frekvens, jo mindre $X_C$ og $U_C$ jo mindre vinkel Fi , og jo større bliver $U_R$.

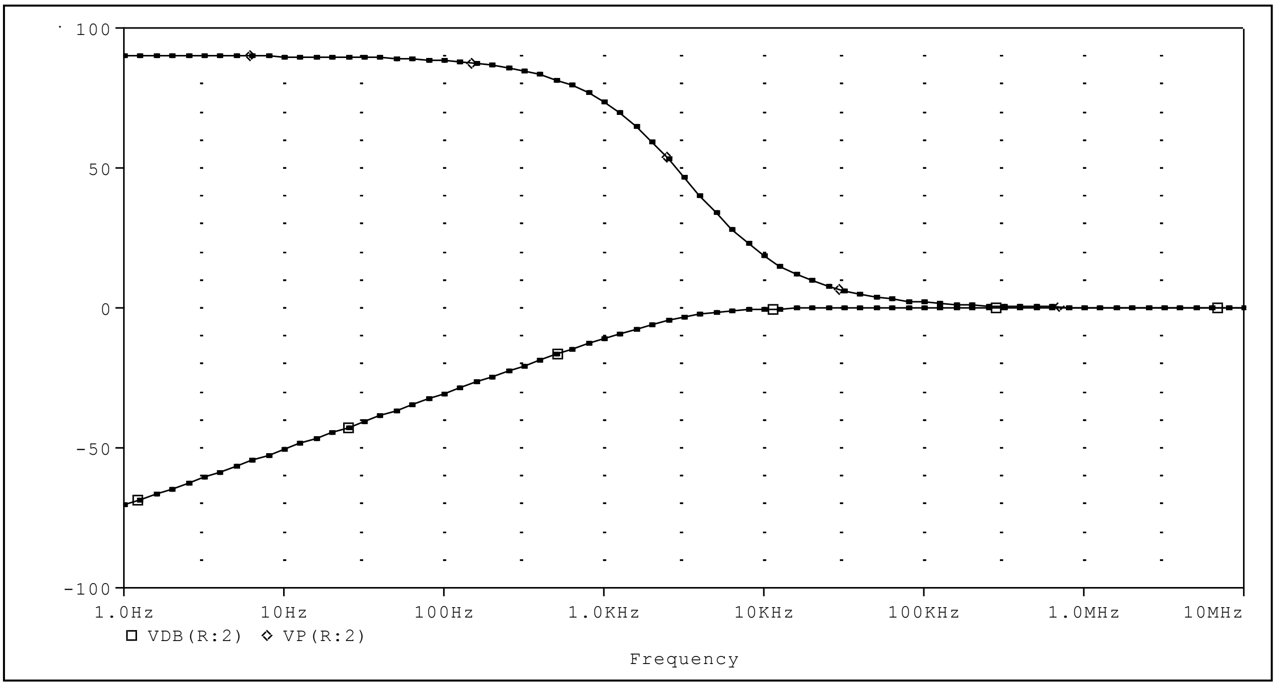
Ved meget lave frekvenser er $X_C$ meget stor i forhold til R, heraf er $U_C$ også stor i forhold til $U_R$, og fasedrejningen er næsten 90 grader. Ugen er jo konstant, og deles vektorielt af $X_C$ og R.

Ved høje frekvenser er kondensatoren næsten kortsluttet, derfor er $U_C$ lille i forhold til $U_R$, og fasedrejningen er næsten 0 grader.

Ved lave frekvenser er XC stor, og der kommer næsten ikke noget ud på Uout. Ved meget høje frekvenser er kondensatoren næsten kortsluttet, og derfor er Uout næsten den samme som Ugen. Høje frekvenser passerer altså, og deraf navnet "Højpasled".




***Skitse af bodeplot af CR-led, et "Højpasled" med tilhørende fasedrejning.***

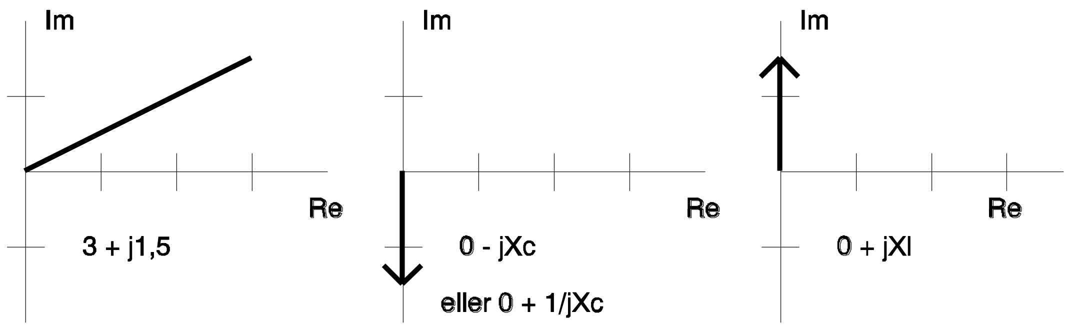



***Bodeplot af et højpasled og tilhørende fasedrejning vist med simuleringsprogrammet ORCAD.***

VDB er Bodeplot af forstærkningen i dB, som selvfølgelig er under 0 ( 1 ganges forstærkning ), og VP er udgangsspændingens fasedrejning.

# BRUG AF KOMPLEKSE TAL.

I ovenstående eksempler er brugt et roterende koordinatsystem, med en X-akse til ikke faseforskudte størrelser, dvs. reelle, og en Y-akse til de faseforskudte, ( kaldes imaginære = svært forståelige ) størrelser. Vektorer heri udtrykker størrelser og fasedrejning for et givet kredsløb ved en given frekvens.




Komplekse Vektorer. Fra venstre: Tilfældig vektor, så for kondensator og sidst for en spole.

Ved matematisk beskrivelse af vektorerne bruges "j" foran de lodrette vektorer for at angive, at de er 90 grader foran eller bagud, dvs. i vores system opad eller nedad.

## Modstand:

Kompleks fremstilling af vektoren for en modstand er :

$Z_R = R + j0$

"j0" angiver, at modstanden ikke har en imaginær del, altså er ren ohmsk eller "reel".

## Kondensator:

For kondensatorer fås, at $Zc = 0 - jXc = 0 - j\dfrac{1}{2\pi fC}$

$2\pi fC$ kan også skrives som $\omega C$ , ( omega * C ), så

$$Zc = 0 - j\frac{1}{\omega C} \quad \text{eller} \quad Zc = 0 + \frac{1}{j\omega C} \quad \text{idet} \quad \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega C} * \frac{j}{j} = \frac{j}{-\omega C} = -j * \frac{1}{\omega C}$$

Bemærk j*j = -1 !

Vektoren starter i origo, og minustegnet indikerer, at den går nedad.

Hvorfor er $j^2$ = -1 ?? Den komplekse vektor j kan også skrives som 0 + j1. Dvs. 0 ud ad x-aksen, og 1 opad Y-aksen. På polær form er 0 + j1 = 1 $\angle$90 j * j er altså lig (1$\angle$90) * (1$\angle$90).Dette er lig 1*1$\angle$(90 + 90 ) = 1$\angle$180. Som igen er lig
–1.

**<u>EKSEMPEL</u>**

Der ses i dette eksempel på en serieforbindelse af en modstand og en kondensator.
Den samlede impedans "Z" er den vektorielle sum af vektoren "R" og "$X_C$" lodret nedad.
Modstanden kan på kompleks form skrives som R + j0, og kondensatorens værdi som 0 - $jX_C$.
Minusset angiver "nedad". Impedansen Z bliver sammenlagt idet "j" angiver de 90 graders drejning:

Vektoren $Z_{in}$ = ( R + j0 ) + ( 0 - $jX_C$ ).

De reelle komposanter adderes for sig, og de imaginære adderes for sig, begge med fortegn. I øvrigt henvises til separat afsnit om regneregler. Her fås:

$Z_{in}$ = R - $jX_C$.

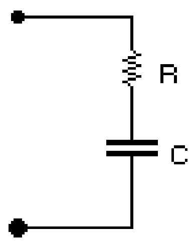
Dette angiver at vektoren $Z_{in}$ kan opløses i en projektion på x-aksen som er "R" og en projektion på y-aksen der er $X_C$ lang i negativ, lodret retning.

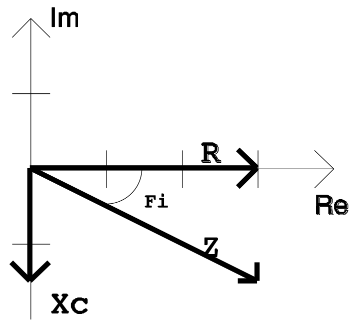
Længden af Z bliver vha Pythagoras :

$$Z = \sqrt{R^2 + Xc^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R \quad + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Fasedrejningen Inv-tan( $X_C$/R ) eller på en anden skrivemåde
"fi" = $tg^{-1}$ ($X_C$/R) bliver :

$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)$ eller $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{Xc}{R}\right)$




Eksempel på beregning af impedansen Z og "fi".

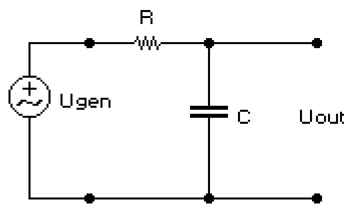
**<u>Eksempel med spændingsdeler:</u>**

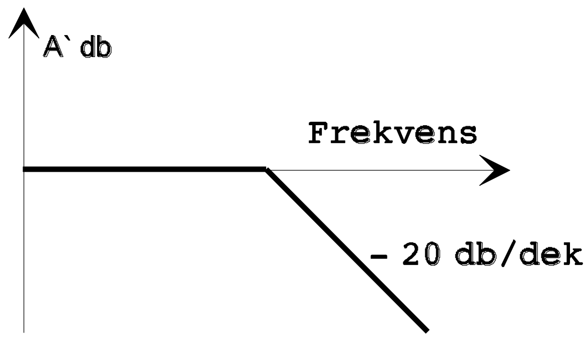
Flg. eksempel med en spændingsdeler bestående af en modstand og en kondensator, et såkaldt "lavpas-led", vil være noget svær at overskue vha vektorer. Men med en undersøgelse eller beregning vha. kompleks regning kan det lade sig gøre, omend mellemregningerne kan være svære at tolke.

Først ses rent logisk, at høje frekvenser nærmest vil være kortsluttede ved udgangen, idet en kondensator er en lille modstand ved høje frekvenser. $U_{Out}$ er altså dæmpet.

Modsat har kondensatoren en meget stor modstand ved meget lave frekvenser, og dette fører til at kondensatoren ikke belaster eller "stjæler" ret meget af signalet ved lave frekvenser. $U_{Out}$ er altså næsten lig $U_{In}$ ved lave frekvenser.

Heraf navnet, LAVPASFILTER. Lave frekvenser passerer nærmest uhindret, og høje dæmpes. Dæmpningen, eller forstærkningen, der er under 1 gange, er altså frekvensafhængig.



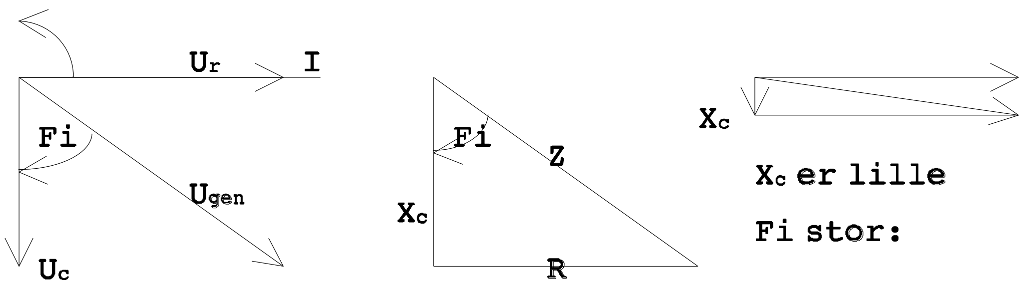



Kredsløb med RC-led og skitse af dets boodeplot. Inddelingen på X-aksen er logaritmisk !

Boodeplottet viser kredsløbets "forstærkningen" ved forskellige frekvenser og angiver hvor knæk-frekvensen eller $f_0$ ligger. Ved knækfrekvensen er forstærkningen faldet 3 dB, og fasedrejningen er 45 grader. Ved knækfrekvensen er $|X_C| = R$

**<u>Undersøgelse af kredsløbet vha. vektorer:</u>**

Som det ses af diagrammet ovenover, tages udgangsspændingen $U_{Out}$ over kondensatoren. Fasedrejningen må altså være forskellen mellem Ugen og Uc.




$U_C$ er bagud i forhold til $U_{Gen}$. Stiger frekvensen,bliver $X_C$ mindre, derfor også vektoren, og fasedrejningen stiger.

$U_C$ er bagud i forhold til $U_{Generator}$. Vinklen "fi" på fasedrejnin-gen, dvs. vinklen mellem $U_{gen}$ og $U_{Out}$ beregnes:

Tangens "fi" = $\dfrac{Modstående}{Hosliggende} = \dfrac{U_R}{U_C} = \dfrac{R}{X_C}$

"fi" er følgelig $\quad tg^{-1}\left(\dfrac{R}{X_C}\right)$

Længden af XC ændres når frekvensen ændres. XC bliver meget kortere ved høje frekvenser. Det indses også af formlen til beregning af XC.

$X_C = \dfrac{1}{2\pi fC}$ Frekvensen f optræder i nævneren. Altså bliver $X_C$ mindre ved stigende frekvens.

Samtidig ses af tegningen, at fasedrejningen bliver meget større ved høje frekvenser, op mod 90 grader.

Er $X_C$ og R lige store, er "fi" = $tg^{-1}(1/1)$ = 45 grader. Det sker ved $f_0$.

Undersøges spændingsdeleren, eller lavpasleddet, med **kompleks notation**, fås, idet der ses på overføringsfunktionen for kredsløbet:

$$A` = \frac{\overline{X_C}}{\overline{R} + \overline{X_C}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

Man bør ikke have "j" i nævneren da det ikke er håndterlig. Ligningen forlænges derfor ved at gange i tæller og nævner med den kompleks konjungerede ( den kompleks modsatte ).

$$A` = \frac{1}{1 + j\omega CR} * \frac{1 - j\omega CR}{1 - j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1^2 - j\omega CR + j\omega CR - j^2 (\omega CR)^2}$$

De to midterste led i nævneren går ud. Nu optræder der et "$j^2$", og der er det specielle ved det komplekse system, at j*j er lig -1. Altså fås:

$$A` = \frac{1 - j\omega CR}{1^2 + (\omega CR)^2}$$

Dette er en sammensat ligning, hvor nogle af leddene angivet med "j" er vinkelret på den reelle, vandrette akse. Ligningen opdeles nu i en vandret, dvs. reel del uden "j", og en imaginær, lodret del med "j" foran. Nævneren må være fælles.

$$A` = \frac{1}{1^2 + (\omega CR)^2} - j\frac{\omega CR}{1^2 + (\omega CR)^2}$$

Længden af de vektorielt sammenlagte dele er:

$$A` = \sqrt{\left(\frac{1}{1+(\omega CR)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega CR}{1+(\omega CR)^2}\right)^2}$$

Og fasedrejningen $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{-\omega CR}{1}\right)$

<u>Prøve:</u>

Resultatet underkastes nu en prøve for at teste resultatet. Der undersøges først for frekvensen f gående mod nul, dvs. ω også går mod nul:

$$A` \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{1+0^2}\right) + \left(\frac{0}{1+0}\right)^2} \angle tg^{-1}\left(-\frac{0}{1}\right)$$

$$A` \rightarrow \sqrt{1^2} \angle tg^{-1}(-0) \rightarrow 1\angle 0$$

$U_{out}$ er altså ved meget lave frekvenser $U_{in}$ ganget med $1\angle 0$

Dvs. at $U_{out}$ går imod $U_{in}$ ganget med 1 og "0" grader fasedrejning. Det må også være resultatet af en logiske betragtning da kondensatoren ikke udgør en belastning ved f gående mod 0..

Herefter undersøges for frekvensen f gående mod uendelig, dvs. ω også går mod uendelig:

$$A` \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{1+\infty^2}\right)^2 + \left(\frac{\infty}{1+\infty^2}\right)^2} \angle tg^{-1}\left(\frac{-\infty}{1}\right)$$

$$A` \rightarrow \sqrt{\frac{1}{\infty^4} + \frac{1}{\infty^2}} \angle -90 \rightarrow 0\angle -90$$

$U_{out}$ er altså ved meget høje frekvenser $U_{in}$ ganget med $0\angle -90$. Dvs. at $U_{out}$ går imod $U_{in}$ ganget med 0 og "90" grader fasedrejning bagud. Outputamplituden går imod "0", eller "kortsluttet", og fasedrejningen er -90 grader.

For frekvensen gående mod $f_0$, dvs. knækfrekvensen i boodeplottet eller den frekvens hvor R = Xc fås:

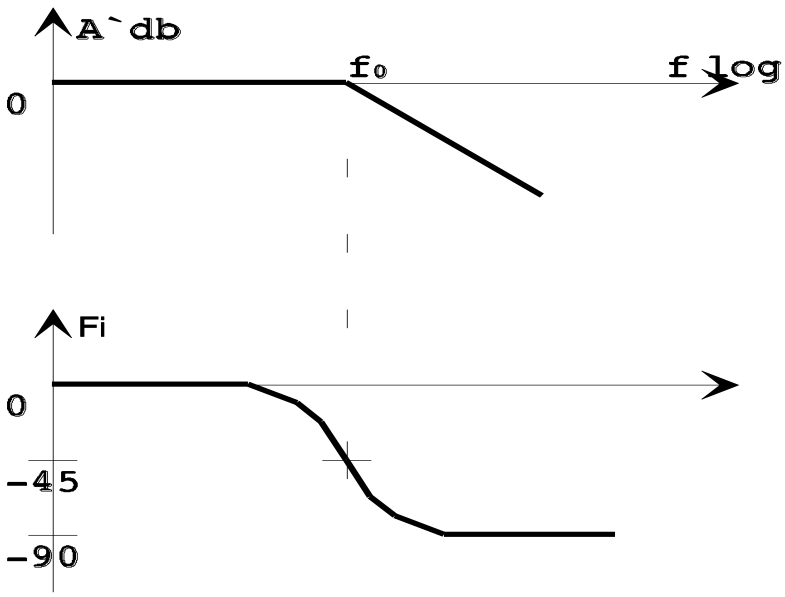
$R = Xc \Leftrightarrow R = \dfrac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega CR = 1$ Dette indsættes:

$$A` \to \sqrt{\left(\frac{1}{1+1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+1^2}\right)^2} tg^{-1} - \left(\frac{1}{1}\right) \qquad A` \to \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \angle -45$$

$$A` \to \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \angle -45 \to \sqrt{\frac{2}{4}} \angle -45 \to \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45$$

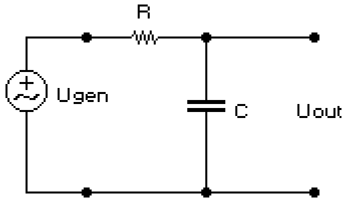
$$A` \to 0{,}707 \angle -45$$

A` = 0,707 og fasedrejningen = 45 grader bagud ved knækfrekvensen. Flg. viser sammenhængen mellem boodeplot og graf for fasedrejningen:

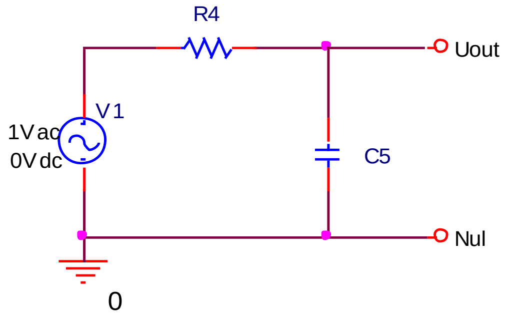
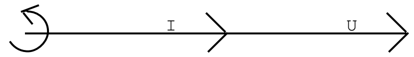
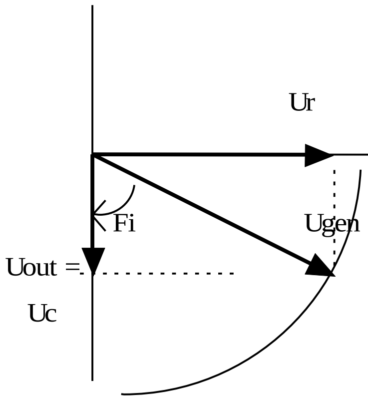


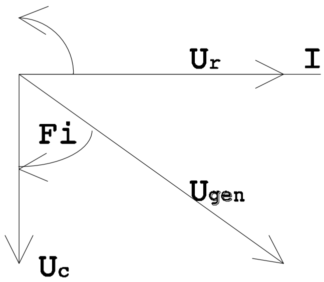

Måleskema:

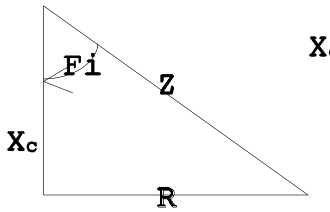
Eksempel: Spændingsdeler:

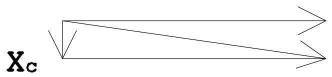



R = 22 KOhm, C = 150 nF

| | |
|---|---|
|   | Generatoren påtrykker en spænding.<br>I er afhængig af impedansen, dvs. den samlede modstand. |
|   | Ved ren ohmsk belastning er strøm og spænding i fase.<br>Faseforskydningen er nul grader. |
|   | Men her findes: Det er en serieforbindelse. Altså er strømmen ens. Og afsættes vandret ud mod højre.<br><br>Ur er i fase med I<br>For kondensatoren gælder, at Ic er 90 grader foran Uc, eller omvendt, Uc er 90 grader bagefter Ic. Altså tegnes nedad.<br><br>Ugenerator er den geometriske sum. Det ses, at generatoren leverer strøm før spænding. ! Men også, at spændingen på udgangen er bagefter generatorens spænding. Derfor vil der også ske fasedrejning i et filter.<br><br>Fasedrejningen er vinklen mellem Uout og Ugenerator. Kaldes Fi, φ. Fi er negativ |
| | |




Xc er lille

Fi stor:

$$tg(\varphi) = \frac{Modstående}{Hosliggende} = \frac{Ur}{Uc} = \frac{R}{Xc}$$

$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{Ur}{Uc}\right)$ Dvs. jo større Uc er i forhold til Ur, jo mindre vinkel.

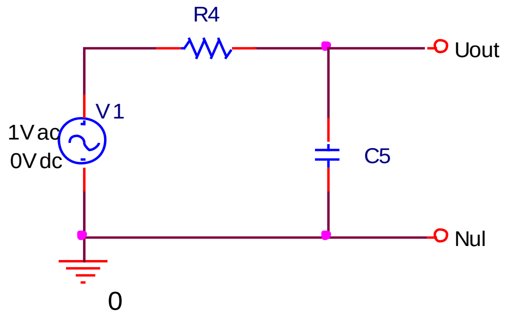
Jo højere frekvens, dvs. jo mindre Uc, jo større vinkel. Altså er fasedrejningen også afhængig af frekvensen.

I knækket kaldes frekvensen = f0, der er R = Xc, og altså er fi = 45 grader.

$Uc = Ugen \cdot \cos(45) = \frac{Ugen}{\sqrt{2}} = Ugen \cdot 0{,}707$ Altså er ”forstærkningen” faldet til 0,707 gange

0,707 gg ~ 3,01 dB.

RC-led betragtet kompleks:

| | |
|---|---|
|  | $A' = \frac{\overline{Xc}}{\overline{R} + \overline{Xc}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$ |
| | |
| | |
| | |

Vi vil gerne fjerne ”j” i nævneren, derfor ganges gennem med den kompleks konjungerede

$$A' = \frac{1 \cdot (1 - j\omega CR)}{(1 + j\omega CR) \cdot (1 - j\omega CR)} = \frac{1 - j\omega CR}{1^2 + (\omega CR)^2}$$

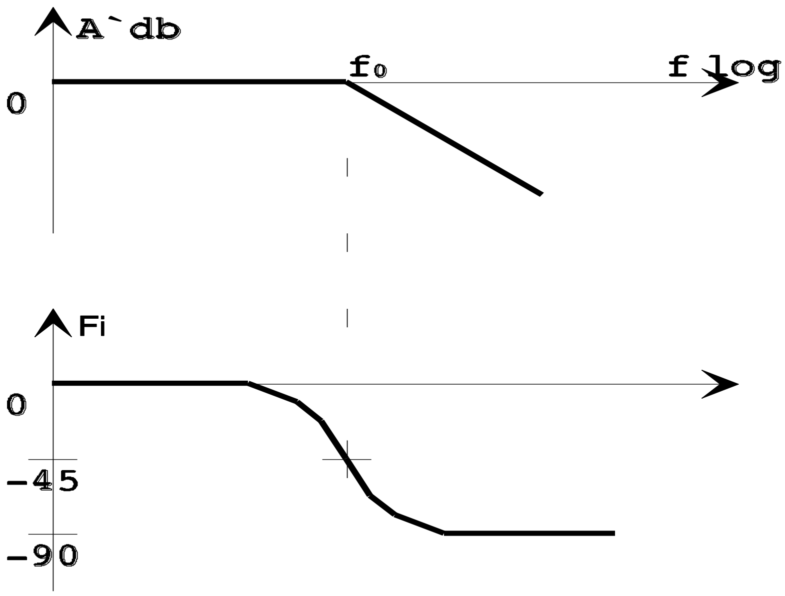
$$A' = \frac{\sqrt{1^2 + (\omega CR)^2}}{1^2 + (\omega CR)^2} \angle tg^{-1} - \left(\frac{\omega CR}{1}\right)$$

Prøve: f➔ 0, => ω ➔ 0

$A' \to \frac{\sqrt{1}}{1} \angle tg^{-1} - (0) \Rightarrow 1 \angle 0$ Altså for meget lave frekvenser er det, der kommer ud, lig med det, der kommer ind, uden fasedrejning. Ved lave frekvenser er modstanden i kondensatoren jo også meget stor.

$$f \to \infty \Rightarrow \omega \to \infty$$

$$A' \rightarrow \frac{\infty^2}{\infty^2} \angle tg^{-1}(-\infty) \rightarrow 0 \angle -90$$




Eks: R = 10K, C = 10nF  Knæk i 1590 Hz.