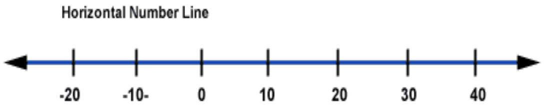
KOMPLEKSE tal er ideelle til beregning på elektriske og elektroniske kredsløb hvori der indgår komponenter, der ved vekselspændinger fase -forskyder strømme og spændinger, og hvis ohmske værdier afhænger af frekvensen. Dvs. spoler og kondensatorer.

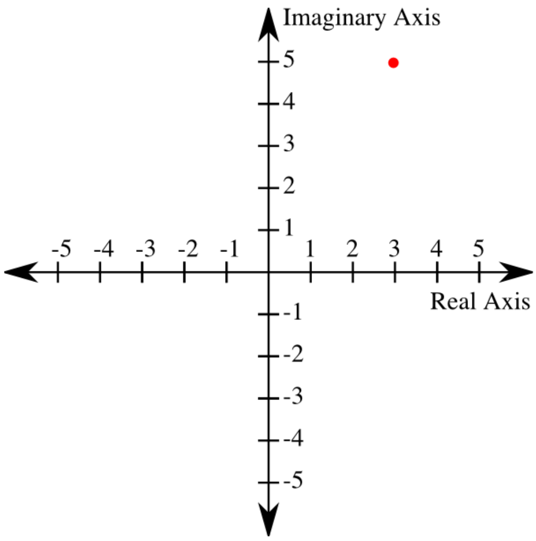
Med komplekse tal kan man opstille ligninger hvori frekvensen indgår som variabel. Ligningerne gælder altså for alle frekvenser, der ”blot” skal indsættes og udregnes.

Ligningerne giver fx. i forstærkerkoblinger som resultat både forstærkningen og fasedrejning.

Komplekse tal opererer med begrebet ”Imaginære tal” – uvirkelige – eller - indbildte tal.

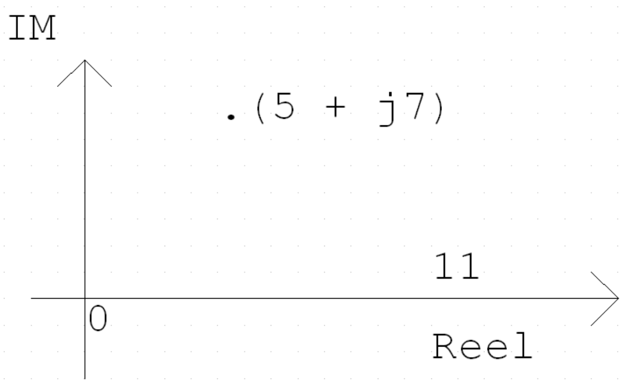
De tal, vi hidtil har opereret med, kan alle afbildes på en tallinie. Et sted er 0, et sted 47 osv. De er alle beliggende på ”X-aksen”.





Med komplekse tal indføres alle tal, der ligger i planet. Et tal kan fx ligge på en position i planet, der kan beskrives som 4 ud ad X-aksen, og 3 op ad Y-aksen.

Dette ligner jo meget vektorer, hvor tallet ville benævnes (4, 3). Vektoren kan også angives som en vektors længde, og dens vinkel i forhold til X-aksen.



Y-aksen kaldes også den Imaginære akse, og X-aksen den Reelle akse.

Tilsvarende med komplekse tal. Et komplekst tal kan angives med en vandret del og en lodret del. De kaldes hhv. den reelle del, og den imaginære del. Forkortes til **Re**, og **Im**.

En angivelse af et tal på den form kaldes **Sumform**. Som med vektorer kan tallet også angives med en længde og en vinkel. Denne form kaldes **Polær**. Altså afstanden ud til tallet, og vinklen i forhold til vandret mød højre!

Den del af et komplekst tal, der er lodret angives med et ”j” foran. I matematikkens verden benyttes ”i” for den imaginære del af et tal, men i elektriske sammenhænge bruges ”i” som formeltegn for strøm, og kan herved forveksles. Det er derfor normalt at bruge ”j”.

I komplekse tal findes definitionen, at j gange j = $j^2=-1$. Eller som det må fremgå, $j=\sqrt{-1}$
Med brug af komplekse tal er det derfor muligt at uddrage kvadratroden af et negativt tal!!

Hvorfor er $j^2 = -1$?

Den komplekse vektor j kan også skrives som 0 + j1. Dvs. 0 ud ad x-aksen, og 1 opad Y-aksen. På polær form er 0 + j1 = 1 $\angle$90 j * j er altså lig (1$\angle$90) * (1$\angle$90).Dette er lig 1*1$\angle$(90 + 90) = 1$\angle$180. Som igen er lig –1 + j0 = –1.

Altså er $j \cdot j = -1$

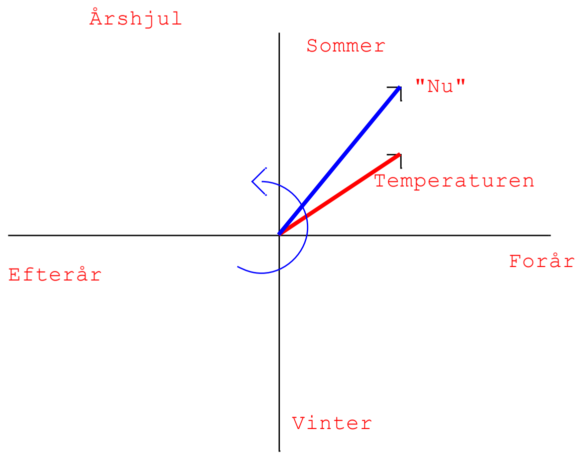
For regneregler for komplekse tal, se sidst i kompendiet!

I elektronik er man nødt til at tage komplekse tal i brug i beregninger hvori indgår kondensatorer eller spoler. Disse er kendt for at strøm og spænding er ude af fase. Der er fasedrejning.

Fasedrejning betyder, at strøm og spænding ikke følges ad tidsmæssigt.

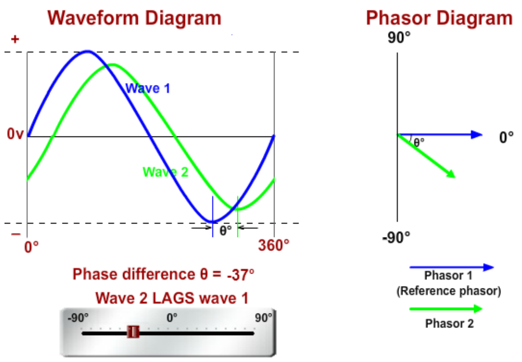
Noget svarende til, at sommeren ikke er varmest omkring midsommer, men er forskudt tidsmæssigt bagud. Og vinteren også.

Et andet eksempel er vores døgnrytme. Vi er ikke vågne symmetrisk om kl. 12 middag.



Man bruger også fasedrejning – eller faseforskydning når man hører en lyd. Ved hjælp af tidsforsinkelsen mellem højre og venstre øre kan man retningsbestemme hvor en lyd kommer fra.

Se animation:



http://www.learnabout-electronics.org/ac_theory/ac_ccts_53.php

Først ses på en modstand:

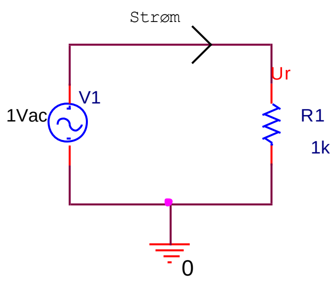
Fasedrejning i MODSTANDE.

Tilsluttes en sinus - spændingsgenerator direkte til en **modstand**, ses, at der går en vekselstrøm gennem modstanden.

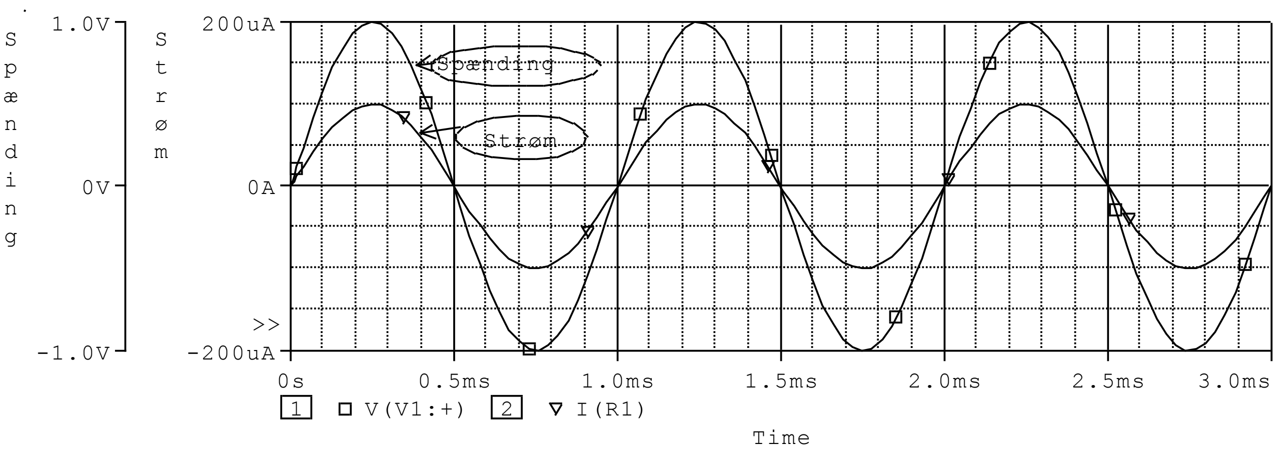
Generatoren pumper ladningerne frem og tilbage. Det er de samme elektroner, der bare skubbes lidt frem og tilbage. Og de løber kun ganske kort, langt under 1 mm. Men alle elektroner skubber til de næste osv. lige som en række togvogne.

Dvs. at når sinus-spændingen er positiv, er strømmen positiv, og når sinus-spændingen er negativ, er strømmen også negativ. Når spændingen er størst, vil strømmen også være størst.

Og i spændingens nulgennemgang, hvor spændingen jo er nul, vil strømmen også være nul.

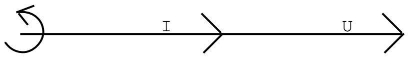


Man siger, at strøm og spænding er i fase. De er der samtidig.



Plot af Spænding og strøm i fase Fasedrejning φ = 0. Det ses, at frekvensen er 1 KHz, dvs. 1 hel svingning på 1 mS

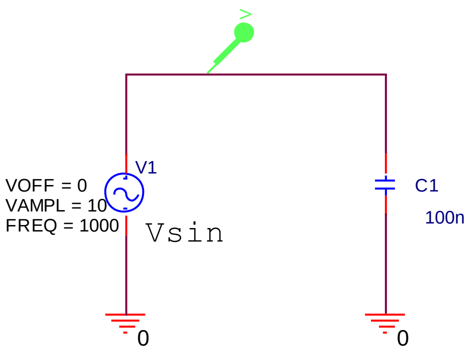
På vektordiagramform ser situationen således ud!

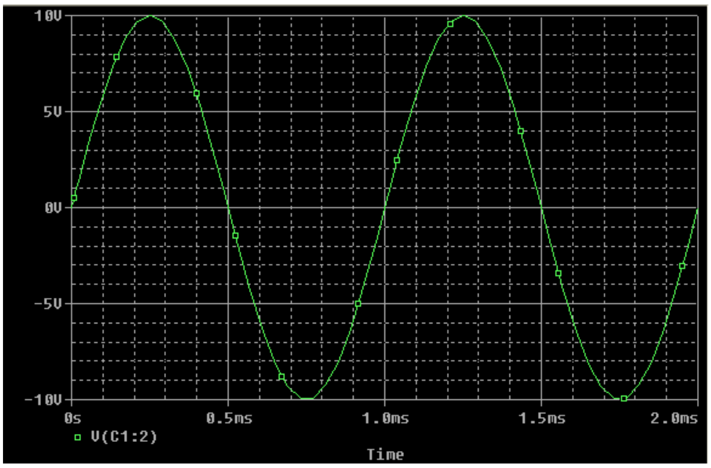


Vinklen mellem spænding og strøm kaldes fasedrejning, og benævnes med Fi, φ. Vinklen er 0 grader. Derfor ikke så interessant for komplekse tal.

KONDENSATORER.

En kondensators "modstand" kaldes **REAKTANS**. Den måles i Ohm, og er udtrykt ved formlen $X_C = \dfrac{1}{2\pi fC}$**.** Frekvensen indgår i ligningen, dvs. reaktansen er frekvensafhængig og omvendt proportional med frekvensen.
Sættes en sinus spændingsgenerator, uendelig god, direkte til en kondensator, vil kondensatorens spænding til enhver tid være den sammen som generatorens. Der er ingen modstand til at bremse ladningerne. Dvs. strømmens flow, så opladningen af kondensatoren sker lynhurtigt. Der er uendelig strøm til rådighed.





Her ses en kondensator, der påtrykkes en spænding fra en sinus-generator. Det er en vekselspænding, - så der må også løbe en vekselstrøm.

Matematisk kan vekselspændingen udtrykkes ved:

$$u(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{hvor} \qquad \omega = 2\pi f$$

Sinus-spændingsgeneratoren (uendelig god), er sat direkte til en kondensator. Kondensatorens spænding til enhver tid være den sammen som generatorens. Der er ingen modstand til at bremse ladningerne / strømmens flow, så opladningen af kondensatoren sker lynhurtigt. Der er uendelig strøm til rådighed.

U_C er altså lig U_{gen}. Altså når U_{gen} er i max, er U_C også i max.

Den strøm, der løber til kondensatoren, bruges til at lade kondensatoren op, så kondensatorens spænding hele tiden er lig generatorens. Dvs. der går en strøm, når der er en spændingsændring. Når generatorens spænding ændres, skal der jo flyttes ladninger, for at kondensatorens spænding bliver den samme. Når nu generatorens spænding er i top, sker der ingen spændingsændring. Dvs. der ikke skal flyttes ladninger til eller fra kondensatoren.

Altså, strømmen er 0, når $U_{generator}$ er i top. – Og det må også være sådan, at ved den største spændingsændring, dvs. i generator-spændingens nulgennemgang, må strømmen være størst.

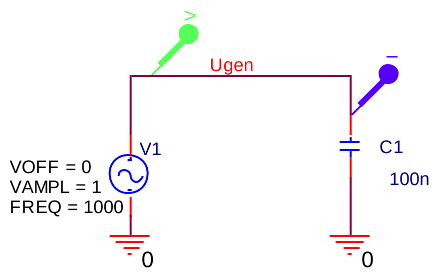
Matematisk kan det udtrykkes ved:

$$I \cong \frac{dU}{dt} \cdot K$$

K er en konstant, her afhængig af kondensatorens størrelse. Jo større kondensator, jo flere ladninger skal flyttes, for at ændre dens spænding. Og tillige afhængig af frekvensen.

U_C er altså lig U_{gen}. Altså når U_{gen} er i max, er U_C også i max.

Men kondensatoren skal jo oplades / aflades for at spændingen over den kan ændres. Og til opladning / afladning kræves, at der flyttes elektroner / ladninger, dvs. at der går en strøm.



<u>Generatoren forbundet til en kondensator.</u>

Dvs. at hvis spændingen over kondensatoren ændres, må der gå en strøm. Og hvis spændingen skal ændres meget på kort tid, må der en "stor" strøm til.

Det betyder også, at hvis der ikke ændres på spændingen over kondensatoren, går der ingen strøm.

Dette sker jo hvis hældningen på den påtrykte sinus er 0. dvs. at $\frac{d(U_c)}{dt} = 0$.

Og dette sker netop i toppunktet og i bunden.

Altså ses, at når

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

må strømmen I være = 0.

Altså hvis sinusspændingen er i top, vil strømmen I_c være 0.

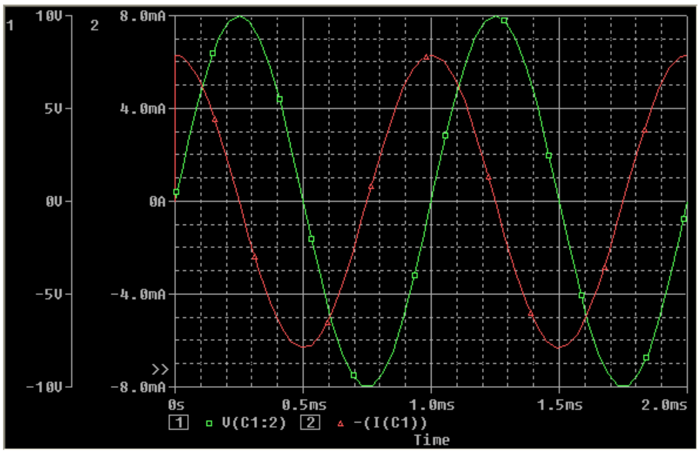
Tilsvarende når generatorspændingen U_C krydser 0 Volt, vil spændingsændringen og dermed hældningen $\frac{d(U_c)}{dt}$ være størst, og dermed må spændingsændringen over kondensatoren også være størst. Og altså også strømmen I_c der går til eller fra kondensatoren.

På en graf ser det ud som på følgende:

I grafen til højre er vist strømmen til kondensatoren. (Den røde) Strømmen hen til kondensatoren regnes positiv.

Det ses, at strømmen I er 90 grader forud for spændingen. Når man "går" ud ad X-aksen, møder man først I-grafen, og efter 90 grader U-grafen.

Der optræder en faseforskydning, eller en fasedrejning mellem strøm og spænding.



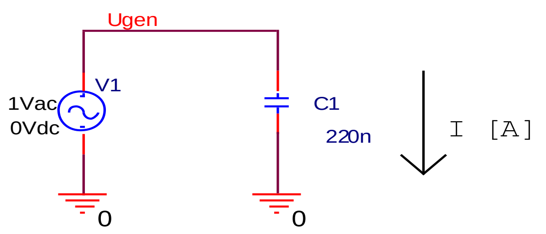
I grafen ovenfor af Uc og Ic, med tiden ud ad X-aksen, vil først Ic krydse 0 [V] på vej ned, og 90 grader senere krydser Uc 0 [V] på vej nedad. Tilsvarende på vej opad. Uc er altså 90 grader bagefter Ic, eller Ic er 90 grader foran Uc. Fasedrejningen FI $\varphi = 90$ grader.

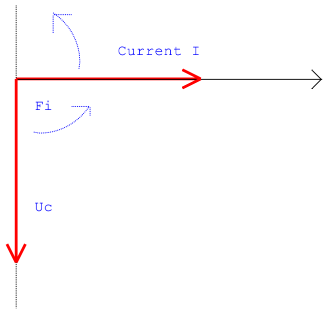
Englænderne ville sige, at "the Voltage LAGS the Current"

For at huske at strømmen er foran spændingen, kan anvendes huskereglen med navnet ELICE. Omkring C`et ses at "I" er før "E".

Egentlig bruges U for spændingen, men tidligere brugtes E. Derfor burde hun hedde ULICU. (I en spole (L) er U før L, og I efter L.)

På vektorform ser det således ud. Vektorerne drejer venstre om. Man står et sted og venter, og den første vektor, der ankommer, er strømmen. 90 grader efter kommer spændingen. Fasedrejningen eller faseforskydningen er 90 Grader.





Strømmen er 90 grader foran spændingen.

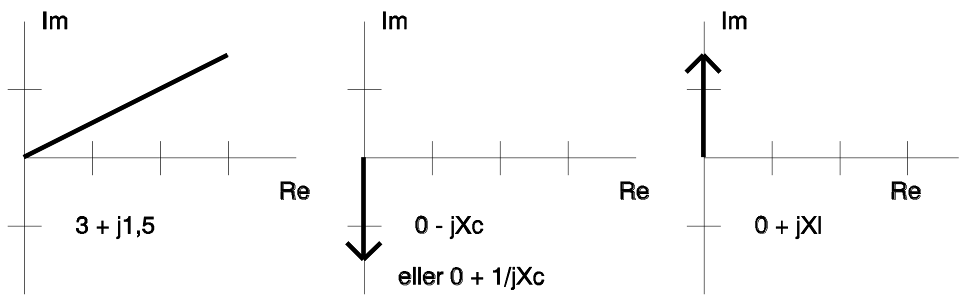
Man siger også, at reaktansen er "kapasitiv".

Vektorerne for strøm og spænding kan udtrykkes ved at bruge komplekse tal

I ovenstående eksempler er brugt et roterende koordinatsystem, med en X-akse til ikke fase-forskudte størrelser, dvs. reelle, og en Y-akse til de faseforskudte, (dvs. imaginære = svært forståelige) størrelser. Vektorer heri udtrykker størrelser og fasedrejning for et givet kredsløb ved en given frekvens.

Komplekse Vektorer:

Fra venstre: Tilfældig vektor, der både består af en reel part og en imaginær part.



I midten for kondensator og til højre vektoren for en spole.

Ved matematisk beskrivelse af vektorerne bruges "j" foran de lodrette vektorer for at angive, at de er 90 grader foran eller bagud, dvs. i vores system opad eller nedad.

+j tegnes opad, -j tegnes nedad

Modstand på kompleks form:

Kompleks fremstilling af vektoren for en modstand er:

$$Z_R = R + j0$$

"j0", som udtales j nul, angiver, at modstanden ikke har en imaginær del, altså er ren ohmsk eller "reel". Altså er vektoren ud ad den normale talakse.

Z bruges om Impedanser, eller ”Modstande”, der ikke er rent ohmske.

Kondensator på kompleks form:

For kondensatorer fås, at impedansen

$$Zc = 0 - jXc$$

Vektoren starter i Origo, og minus j fortæller, at den imaginære vektor peger nedad.

Vi har fra tidligere, at:

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot c}[\Omega]$$

Derfor fås:

$$Zc = 0 - j\frac{1}{2\pi fC}$$

$2\pi fC$ kan også skrives som ωC , (omega * C), så

$$Zc = 0 - j\frac{1}{\omega C}$$

Eller fordi:

$$-j\ \frac{1}{\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j \cdot j}{j \cdot \omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Zc = 0 + \frac{1}{j\omega C}$$

Bemærk j*j = -1 !!

Vektoren starter i origo, og minustegnet indikerer, at den går nedad.

Men hvorfor er j^2 = -1 ??

The complex vector j can be described as 0 + j1. Meaning, 0 along the x-axis, and 1 upwards

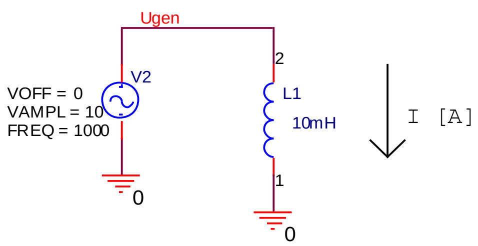
In polar form it equals 0 + j1 = 1 $\angle 90$

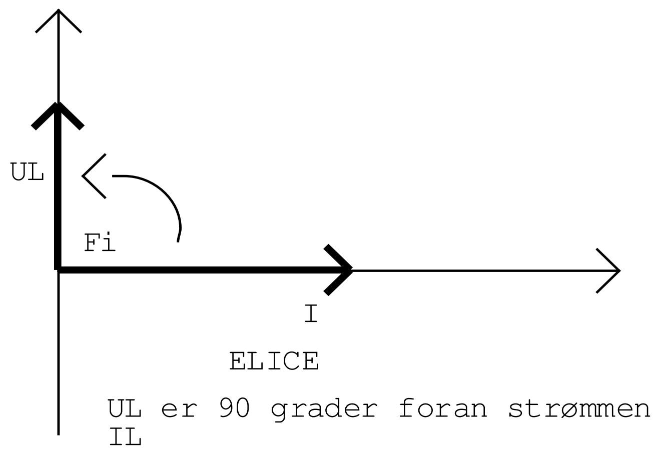
So j * j equals (1∠90) * (1∠90). This equals 1*1∠(90 + 90) = 1∠180.

1∠180 is the same as –1.

SPOLER.

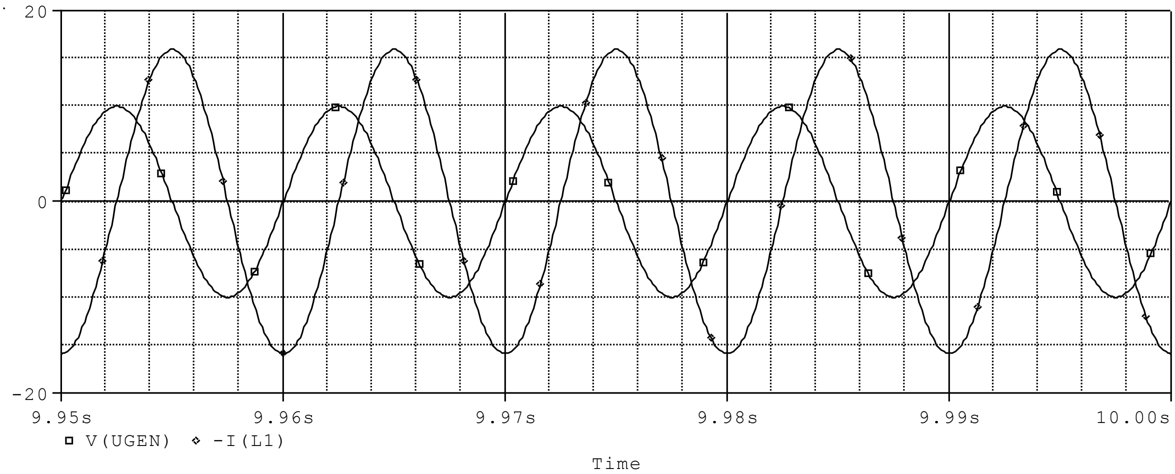
I en spole er strømmen 90 grader bagud i forhold til spændingen. Dvs. at U er før I. Reaktansen kaldes "INDUKTIV", ikke ohmsk !!, og beregnes med $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$. Enheden er Ohm.





Simuleres med ORCAD skal der sættes en lille modstand ind i serie med spolen, idet en ideel spole jo ikke har nogen trådviklingsmodstand, og strømmen i den kan derfor blive uendelig stor.

En graf for strøm og spænding ses her:



<u>På grafen ses, at U er 90 grader før I</u>

Det udtrykkes på kompleks form:

$$Z_l = 0 + jXl$$

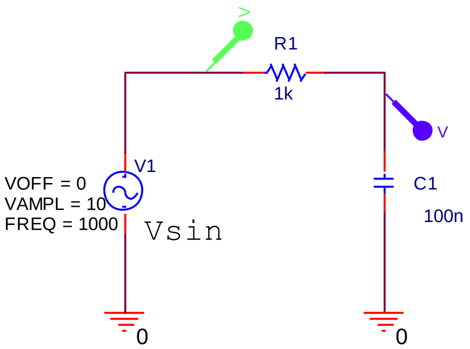
MODSTAND OG KONDENSATOR I SERIE.

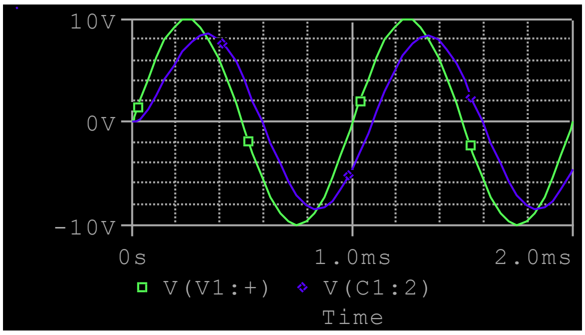
Er der en modstand og en kondensator i serie, eller i parallel, vil den samlede impedans også være frekvensafhængig. Hermed vil der være en fasedrejning, der også er afhængig af frekvensen.

Når man nu sætter modstande og kondensatorer sammen, kan modstandene ikke adderes direkte, fordi strøm og spænding ikke er i fase i kondensatoren. Det er de i modstanden!

For at analysere situationen, kan man bruge vektordiagrammer. Vektorer afbilder spændingen over modstanden og over kondensatoren.

Først ses her Orcad-simulering.

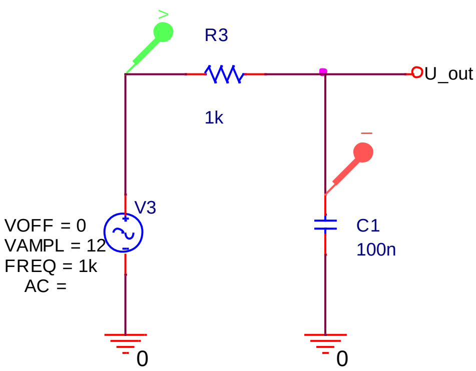




En serieforbindelse bestående af en modstand og en kondensator påtrykkes en sinus-spænding.

Leddet kaldes også et RC-led.

Ethvert RC-led har en overgangs-frekvens, kaldet f_0. Det er den frekvens, ved hvilken $X_C = R$.



Den påtrykte spænding deler sig mellem modstanden og kondensatoren, og idet kondensatorens modstand er frekvensafhængig, må der også være et frekvensafhængigt forhold mht. spændingsdelingen.

Strømmen I er ens i de to komponenter. Når der går en strøm i den ene, går der også strøm i den anden. Der kan ikke ophobes ladninger! Strøm ophobes ikke. Der kan måles lige stor strøm hele vejen rundt i kredsløbet.

Størrelsen af strømmen I er afhængig af modstanden, generatoren ser ind i. Og modstanden er igen afhængig af generatorens frekvens, idet kondensatorens modstand Xc jo er frekvensafhængig.

Hvis en modstand ikke er ren ohmsk, kaldes den for en **impedans**.

Ved ren ohmsk belastning ville strøm og spænding være i fase, dvs. at når spændingen er på sit højeste, er strømmen det også. Og når spændingen er 0, er strømmen også 0. Fasedrejningen Fi φ er 0 grader. (Dette er vist tidligere)

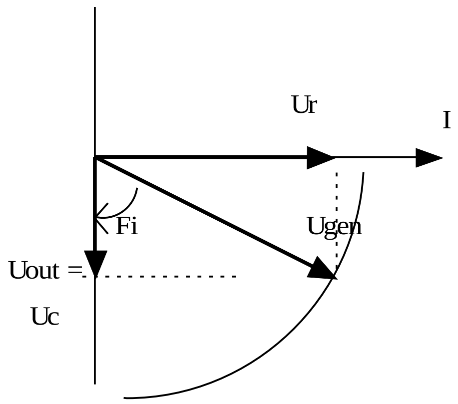
I et vektordiagram – se nedenfor - afsættes den, der er "ens", altid vandret til højre. I en serieforbindelse er det strømmen, der er ens – eller fælles. Strømmen går jo gennem begge komponenter samtidigt.

Spændingen over modstanden U_R er altid i fase med strømmen og afsættes ud ad X-aksen i fase med strømmen. I kondensatoren er strømmen I_C 90 grader foran spændingen U_C - og det betyder jo også, at spændingen er bagud for strømmen. 90 grader bagud.

Vektordiagrammet drejer mod uret. Man "står" så et sted, og ser, hvad der først kommer forbi. Derfor afsættes U_C lodret nedad, altså 90 grader bagud.

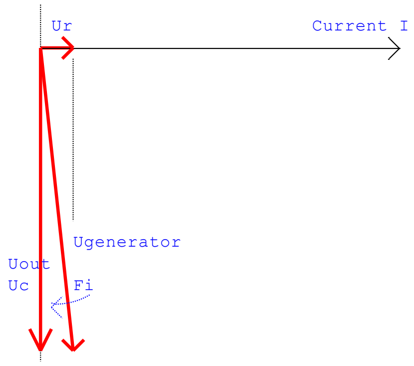
Forholdene kan ved en given frekvens tegnes i det roterende koordinatsystem. Strømmen må være ens i serieforbindelsen. Derfor afsættes den vandret.

U_R er i fase med strømmen, og afsættes vandret. U_C er 90 grader bagud, (idet strømmen er forud), altså afsættes den nedad.

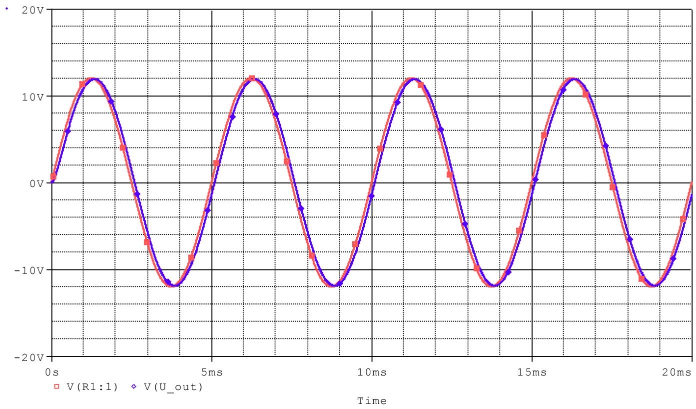


Vektorerne ved lave frekvenser:

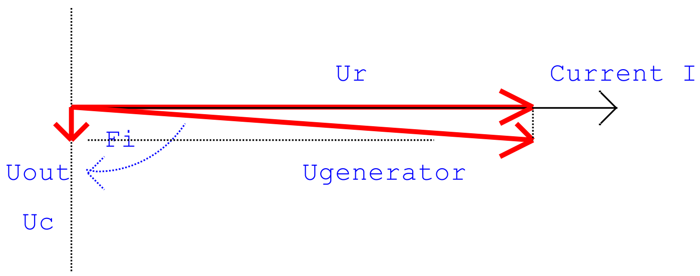
Kondensatoren "stjæler" ikke meget signal.



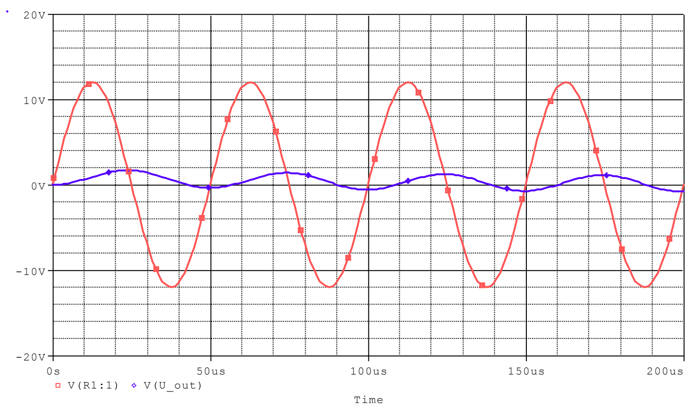
Udgangssignal og
indgangssignal er næsten ens.



Ved høje frekvenser



Udgangsspændingen er lav.



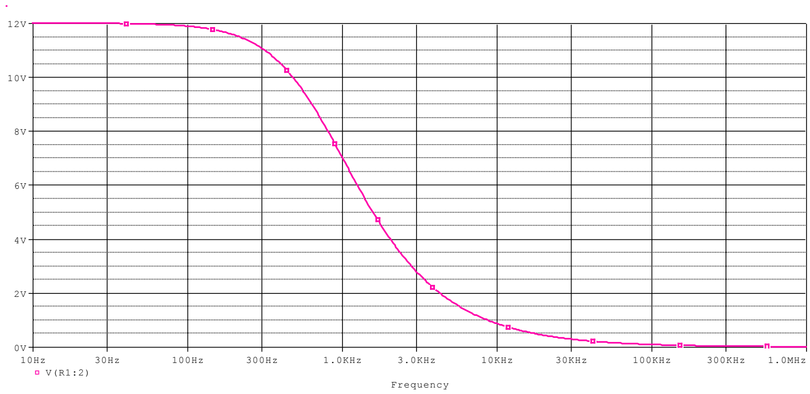
Og en graf for udgangsspændingen ved et frekvenssweep:

Graf for alle frekvenser, her mellem 10 Hz og 1 MHz.

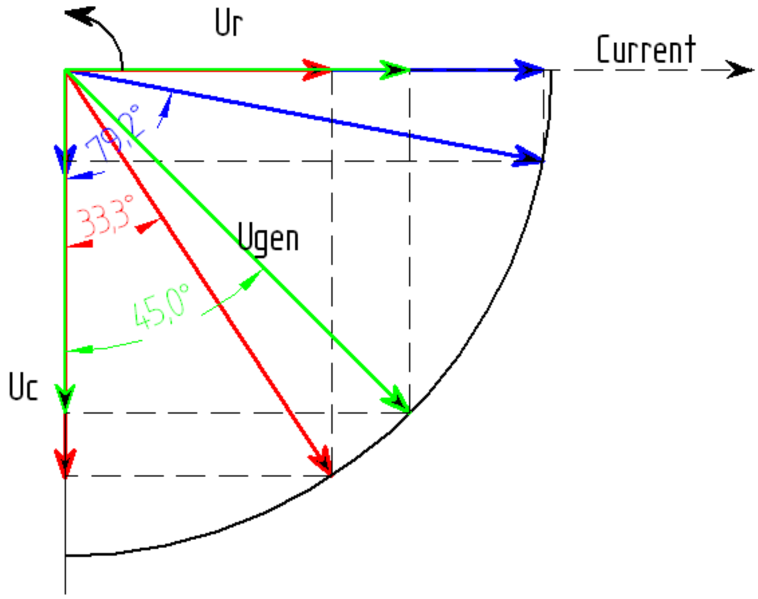
Ved lave frekvenser er outputtet lig indgangsspændingen

De kan passere kredsløbet.

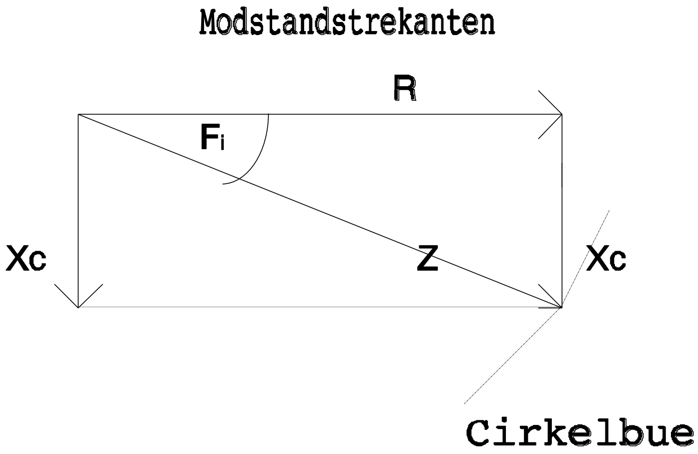
Derfor “Lowpass”



Samlet:



"fi" er vinklen mellem strøm og spænding. Spidsen af vektoren Z beskriver en cirkelbue fra lodret nedad til vandret mod højre når frekvensen går fra 0 mod uendelig."fi" er 45 grader ved X_C = R, dvs. ved f_0.



Den samlede "modstand", kaldes impedans, når den ikke er ren ohmsk.

Den findes ved at addere de to vektorer "vektorielt", eller ved beregning: $Z = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$ eller

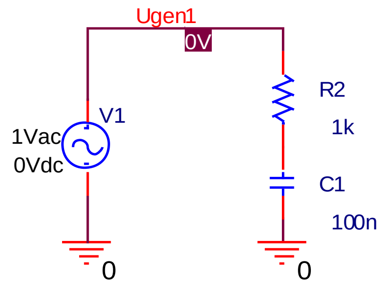
$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

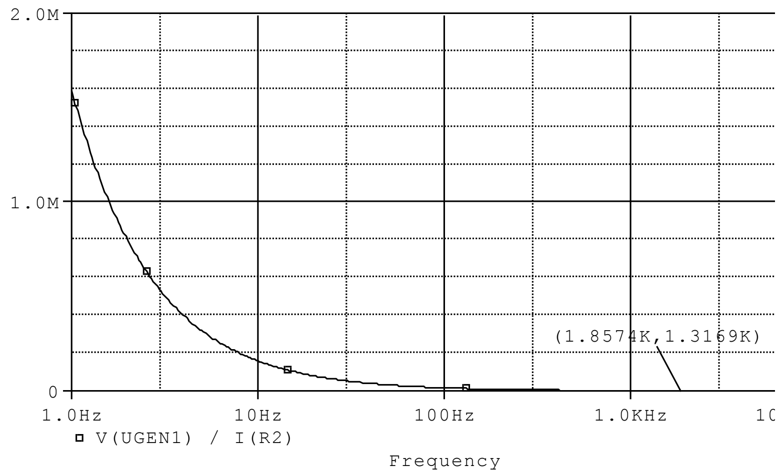
Modstandstrekanten fremkommer ved at dividere spændingerne med strømmen. Trekanterne ligner altså hinanden hvad størrelsesforholdene angår. De er ligedannede !

Af $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ ses, at for $\mathrm{f} \to \infty \Rightarrow \mathrm{X_C} \to 0 \Rightarrow \mathrm{Z} \to \mathrm{R}$.

Husk! $\mathrm{X_C} = \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{f} \cdot \mathrm{C}}$

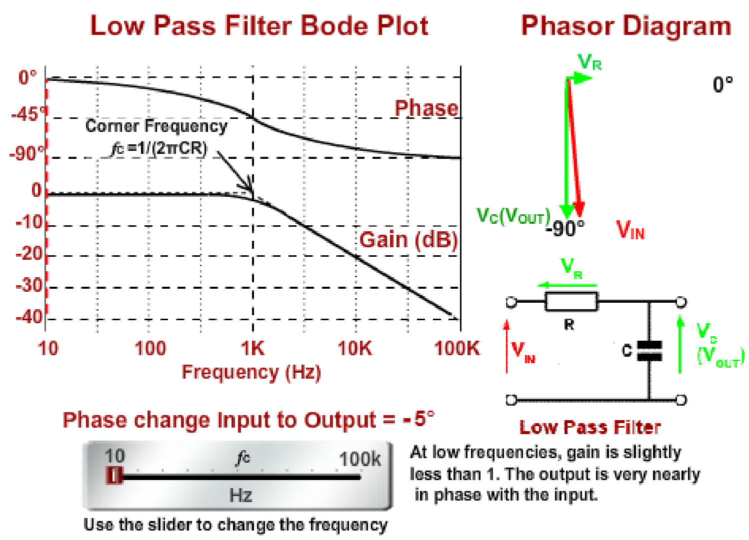
Med værdierne R = 1Kohm og C = 100 nF fås følgende graf for Z, altså indgangsmodstanden $Z = \overline{R} + \overline{X}_C$





Ved lave frekvenser er modstanden i kondensatoren meget stor. Ved meget høje frekvenser går Xc mod nul, og grafen må gå mod 1 K. Modstandens værdi ændres jo ikke!

Se evt animation:

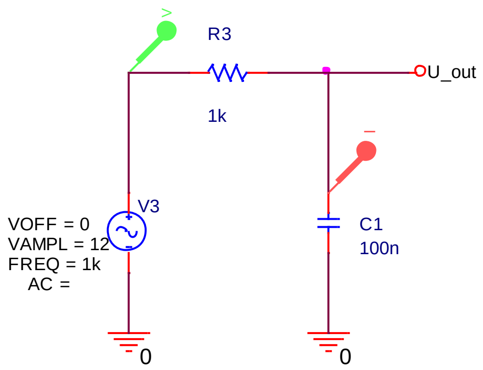


Kilde: http://www.learnabout-electronics.org/ac_theory/filters82.php#lpf

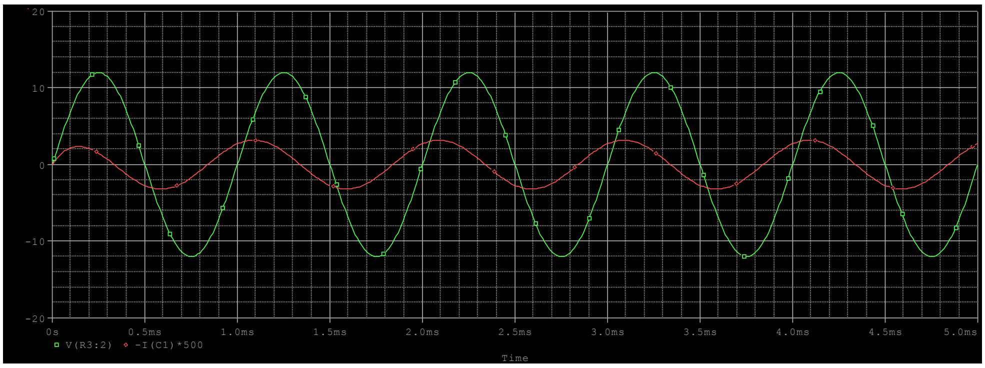
Opfattes RC-leddet som en spændingsdeler, fås følgende:

Flg. eksempel med en spændingsdeler, bestående af en modstand og en kondensator, et såkaldt "lavpas-led", vil være noget svær at overskue vha. vektorer. Men med en undersøgelse eller beregning vha. kompleks regning kan det lade sig gøre, omend mellemregningerne kan være svære at tolke.

Den påtrykte spænding deler sig mellem modstanden og kondensatoren, og idet kondensatorens modstand er frekvensafhængig, må der også være et frekvensafhængig forhold mht. spændingsdelingen.



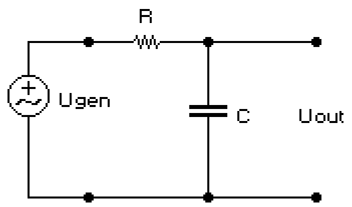
Nu er fasen ikke lig med 90 grader.

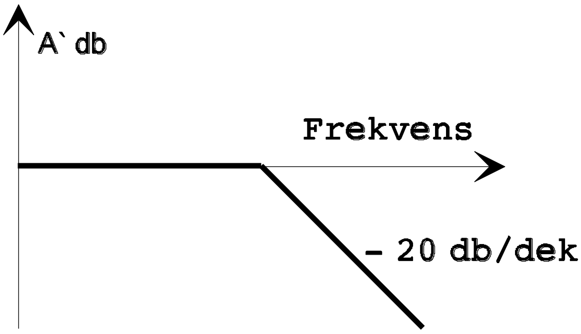


Først ses rent logisk, at ved høje frekvenser vil udgangen nærmest være kortsluttet, idet en kondensator er en lille modstand ved høje frekvenser. U_{Out} er altså dæmpet ved høje frekvenser.

Modsat har kondensatoren en meget stor modstand ved meget lave frekvenser, og dette fører til at kondensatoren ikke belaster eller "stjæler" ret meget af signalet ved lave frekvenser. U_{Out} er altså næsten lig U_{In} ved lave frekvenser.

Heraf navnet, LAVPASFILTER. Lave frekvenser passerer nærmest uhindret, og høje dæmpes. Dæmpningen af udgangen er altså frekvensafhængig. Man kan også opfatte kredsløbet som en forstærker, hvor forstærkningen dog er under 1 gange.





Kredsløb med RC-led og skitse af dets bode plot. Inddelingen på X-aksen er logaritmisk !!

På Y-aksen angives forstærkningen i dB. Dvs. 20 * Log_{10} (Uout / Uin)

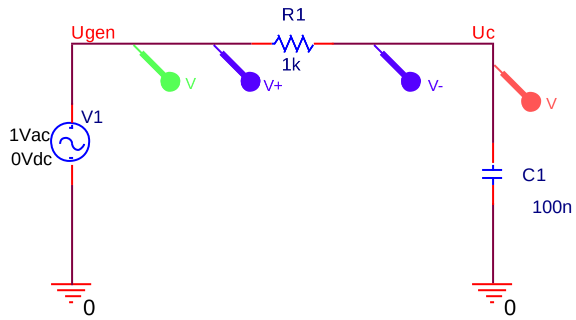
Ser man logisk på kredsløbet, må der være en frekvens, hvor størrelsen af R er lig størrelsen af Xc, idet Xc jo er frekvensafhængig. Det er jo en serieforbindelse, så strømmen er ens !! Derfor må spændingen over modstanden R have samme størrelse som spændingen over C ved denne frekvens. Men de er jo vinkelrette på hinanden !!!! Og summen af dem må være lig den påtrykte spænding.

Grafisk haves en ligesidet retvinklet trekant. Hypotenusen er den påtrykte spænding, og den må være lig $\sqrt{(Side1)^2 + (Side2)^2}$. Eller med andre ord, spændingen over modstanden og kondensatoren er hver især 0,707 gange den påtrykte spænding. !!

Frekvensen, hvor størrelsen af R og Xc er ens, kan findes af:

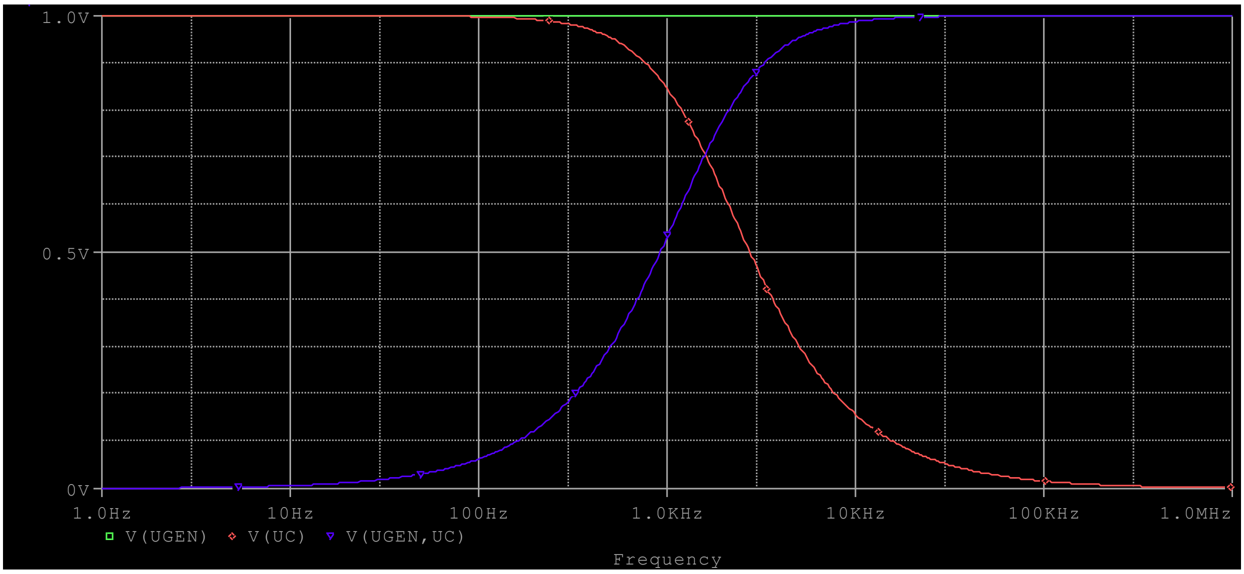
$$R = X_C\,, \rightarrow \quad R = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C}\,, \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R\cdot C}$$

Undersøges et kredsløb med ORCAD, findes følgende:



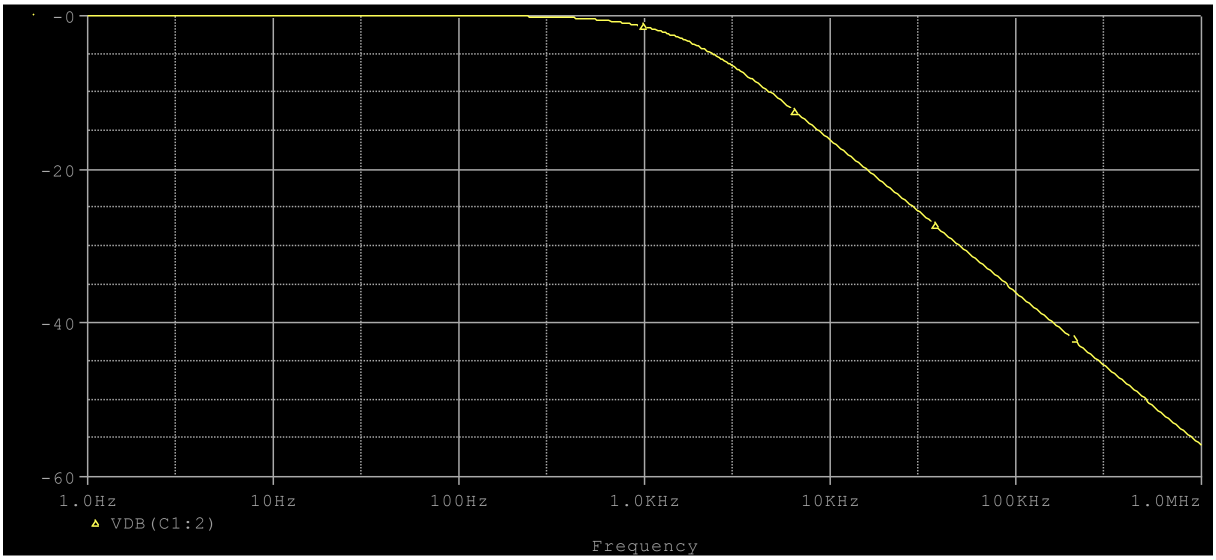
Til venstre ses et eksempel på et kredsløb.

Graferne herunder viser spændingerne over modstanden, (den blå,) og over kondensatoren, den røde ! Tilsammen er spændingerne lig den påtrykte spænding, Ugen.

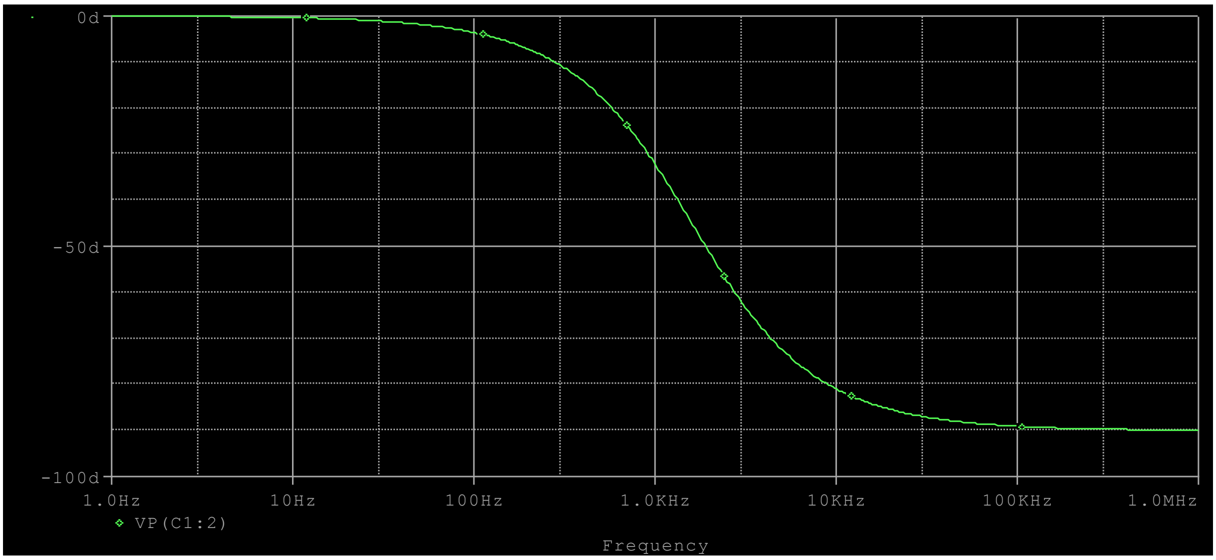


Bodeplot

Et Bodeplot, der viser kredsløbets "forstærkningen" i dB ved forskellige frekvenser ser således ud:



En graf for fasedrejningen for udgangsspændingen ser således ud.



Ved knækfrekvensen er forstærkningen faldet 3 dB, og fasedrejningen er 45 grader. Ved knækfrekvensen er $|X_C| = R$

U_C er bagud i forhold til $U_{Generator}$. Vinklen "fi" på fasedrejningen, dvs. vinklen mellem U_{gen} og U_{Out} beregnes:

Tangens "fi" = $\frac{Modstående}{Hosliggende} = \frac{U_R}{U_C} = \frac{R}{X_C}$

"fi" er følgelig $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{U_R}{U_C}\right) = tg^{-1}\left(\frac{R}{X_C}\right)$

<u>Undersøgelse af kredsløbet vha. kompleks regning:</u>

Undersøges spændingsdeleren, eller lavpasleddet, med **kompleks notation**, fås, idet der ses på overføringsfunktionen for kredsløbet: (spændingsdelerformlen)

Forstærkningen for et RC-kredsløb er:

$$Gain = A` = \frac{\overline{X_C}}{\overline{R} + \overline{X_C}}$$

Forstærkningen $$A` = \frac{\overline{X_C}}{\overline{R} + \overline{X_C}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

Man bør ikke have "j" i nævneren da det ikke er håndterlig. Ligningen forlænges derfor ved at gange i tæller og nævner med den kompleks konjugerede, dvs. den kompleks modsatte.

$$A` = \frac{1}{1 + j\omega CR} * \frac{1 - j\omega CR}{1 - j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1^2 - j\omega CR + j\omega CR - j^2(\omega CR)^2}$$

De to midterste led i nævneren går ud. Nu optræder der et "j^2", og der er det specielle ved det komplekse system, at j*j er lig -1. Altså fås:

$$A` = \frac{1 - j\omega CR}{1^2 + (\omega CR)^2}$$

Dette er en sammensat ligning, hvor nogle af leddene, angivet med "j", er vinkelret på den reelle, vandrette akse. Ligningen opdeles nu i en vandret, dvs. reel del uden "j", og en imaginær, lodret del med "j" foran. Nævneren må være fælles.

$$A` = \frac{1}{1^2 + (\omega CR)^2} - j\frac{\omega CR}{1^2 + (\omega CR)^2}$$

Længden af de vektorielt sammenlagte dele er:

$$A` = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + (\omega CR)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}\right)^2}$$ Som er det samme som: $$A' = \frac{\sqrt{1^2 + (\omega C R)^2}}{1 + (\omega C R)^2}$$

Dvs. grafen for et Bodeplot for kredsløbet kan tegnes som

$$20 \cdot \log_{10}(\mathrm{A}')$$ med f som variabel !!

Og fasedrejningen $$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{-\omega CR}{1}\right)$$

Obs: Idet nævneren er ens for den reelle del og den imaginære del, er det nok ved betragtning af fasevinklen at se på tællerne.

Prøve:

Resultatet kan nu underkastes en prøve for at teste resultatet. Der undersøges først for frekvensen f gående mod nul, dvs. omega også går mod nul:

$$A` \to \sqrt{\left(\frac{1}{1+0^2}\right) + \left(\frac{0}{1+0}\right)^2} \angle tg^{-1}\left(-\frac{0}{1}\right)$$

$$A` \to \sqrt{1^2} \angle tg^{-1}(-0) \to 1\angle 0$$

Eller

$$A´ \to \frac{\sqrt{1^2}}{1} \angle tg^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) \to 1\angle 0$$

U_{out} er altså ved meget lave frekvenser U_{in} ganget med $1\angle 0$

Dvs. at U_{out} går imod U_{in} ganget med 1 og "0" grader fasedrejning.

Det må også være resultatet af en logisk betragtning da kondensatoren ikke udgør en belastning ved frekvensen f gående mod 0.

Herefter undersøges for frekvensen f gående mod uendelig, dvs. omega også går mod uendelig:

$$A` \to \sqrt{\left(\frac{1}{1+\infty^2}\right)^2 + \left(\frac{\infty}{1+\infty^2}\right)^2} \angle tg^{-1}\left(\frac{-\infty}{1}\right)$$

$$A` \to \sqrt{\frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^2}} \angle -90 \to 0\angle -90$$

U_{out} er altså ved meget høje frekvenser U_{in} ganget med $0\angle -90$. Dvs. at U_{out} går imod U_{in} ganget med 0 og "90" grader fasedrejning bagud. Outputamplituden går imod "0", eller "kortsluttet" til stel, og fasedrejningen er -90 grader.

For frekvensen gående mod f_0, dvs. knækfrekvensen i bodeplottet, eller den frekvens, hvor R = Xc, fås:

$$R = Xc \Leftrightarrow R = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega CR = 1$$

Dette indsættes:

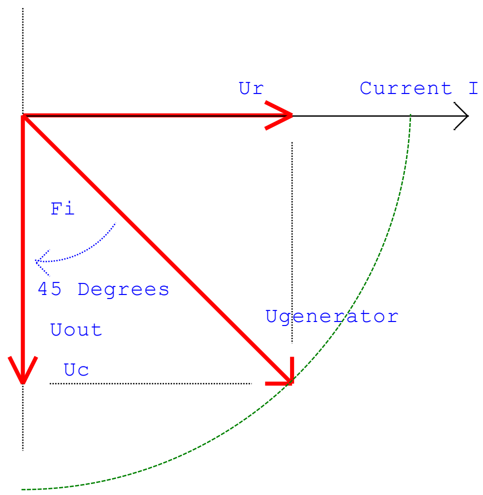
$$A` \to \sqrt{\left(\frac{1}{1+1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+1^2}\right)^2} \quad \angle\ tg^{-1} - \left(\frac{1}{1}\right)$$

$$A` \to \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \angle -45$$

$$A` \to \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \angle -45 \to \sqrt{\frac{2}{4}} \angle -45 \to \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45$$

$$A` \to 0{,}707 \angle -45$$

A` = 0,707 og fasedrejningen = 45 grader bagud ved knækfrekvensen. Følgende skitser viser sammenhængen mellem Bodeplot og graf for fasedrejningen: Ovenfor ses ORCAD grafer, og igen herunder, med andre komponentværdier:



$$U_{Out} = \frac{U_{In}}{Cos(45)} = \frac{U_{In}}{\sqrt{2}} = Uin \cdot 0{,}707$$

A` = 0,707

Fasevinklen Fi er - 45 grader

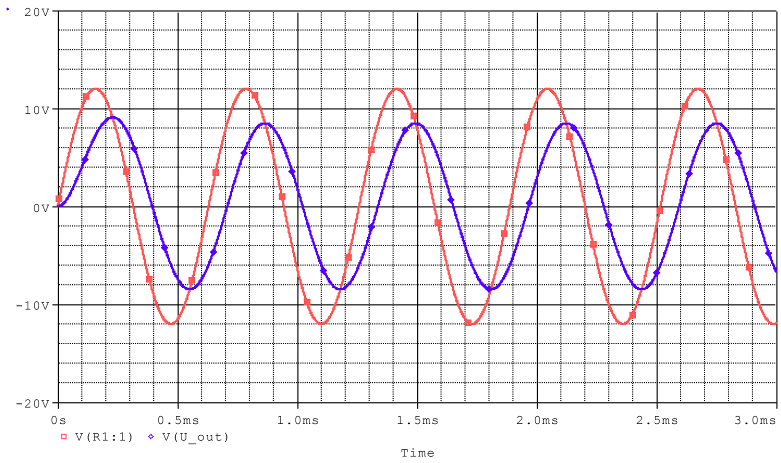
(Altså ved knækfrekvensen f0)

Her er output lig med den påtrykte spænding ganget med 0,707.

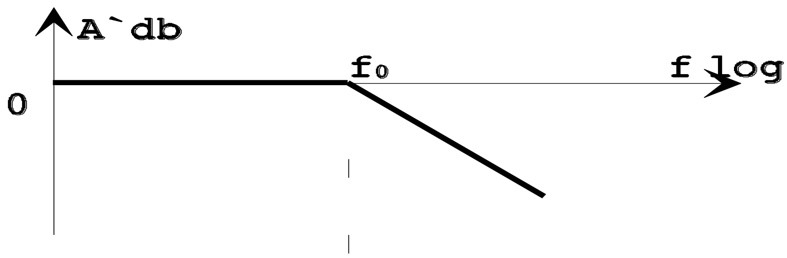
Frekvensen er 1590 Hz.

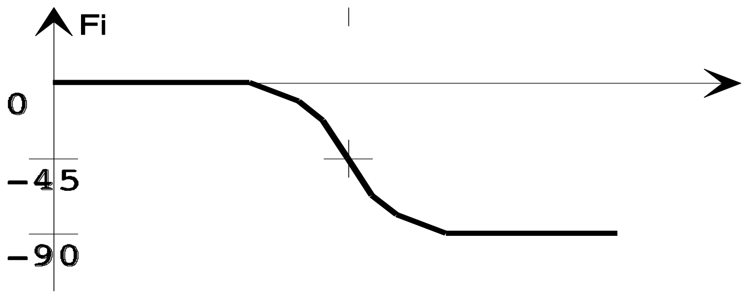
Ved denne frekvens er værdien af modstanden lig med Xc.

Derfor: $1K = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot c}$



Og her en skitse af et Bodeplot





dB udregnes som 20 * Log_{10}(Uout/Uin)

I knækket er udgangsspændingen faldet til 0,707 gange Uin. Hvis indgangssignalet sættes til 1 Volt, fås:

$$A' = 20 \cdot Log_{10}\left(\frac{0,707}{1}\right) \approx -3$$

Højpas-led (CR-led)

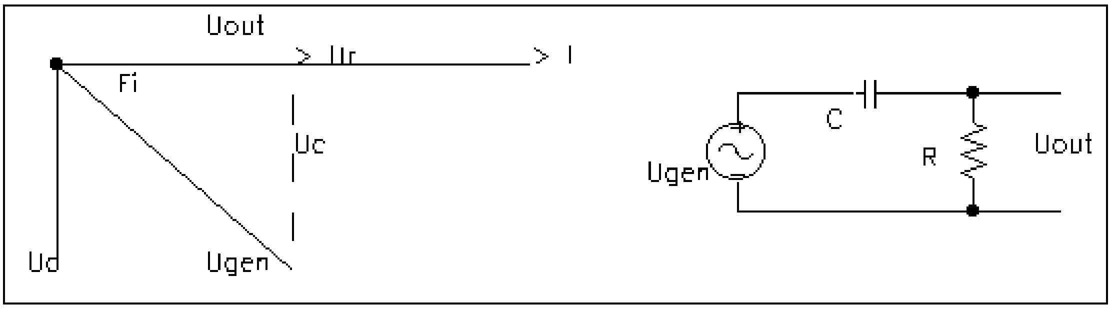
Fasedrejning Højpasled

I et højpasled er strømmen I også ens. Det er jo en serieforbindelse.

U_R er i fase med strømmen, og I_C 90 grader foran U_C.

Ugen, som er den geometriske sum af U_R og U_C, er bagud i forhold til strømmen, dvs. strømmen er foran U_{gen}.

U_{out} tages over U_R og er således foran generatorspændingen. Fi er altså positiv og er vinklen fra U_{gen} til U_R.



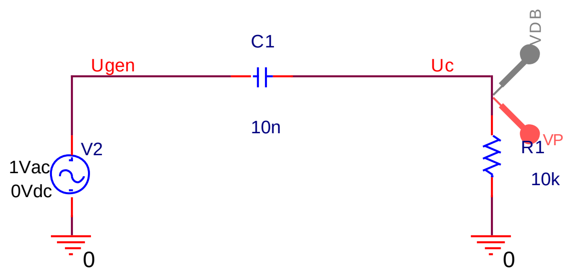
Vektordiagram for et CR-led. Uout er foran generatorspændingen.

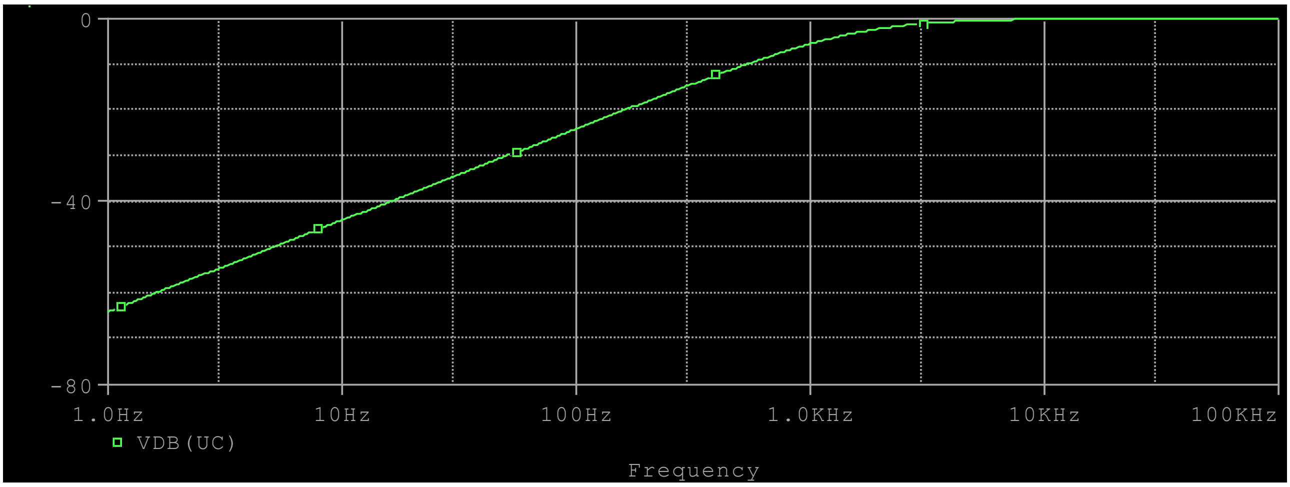
Det ses af vektordiagrammet at jo højere frekvens, jo mindre X_C og dermed U_C, jo mindre vinkel Fi, og jo større bliver U_R.

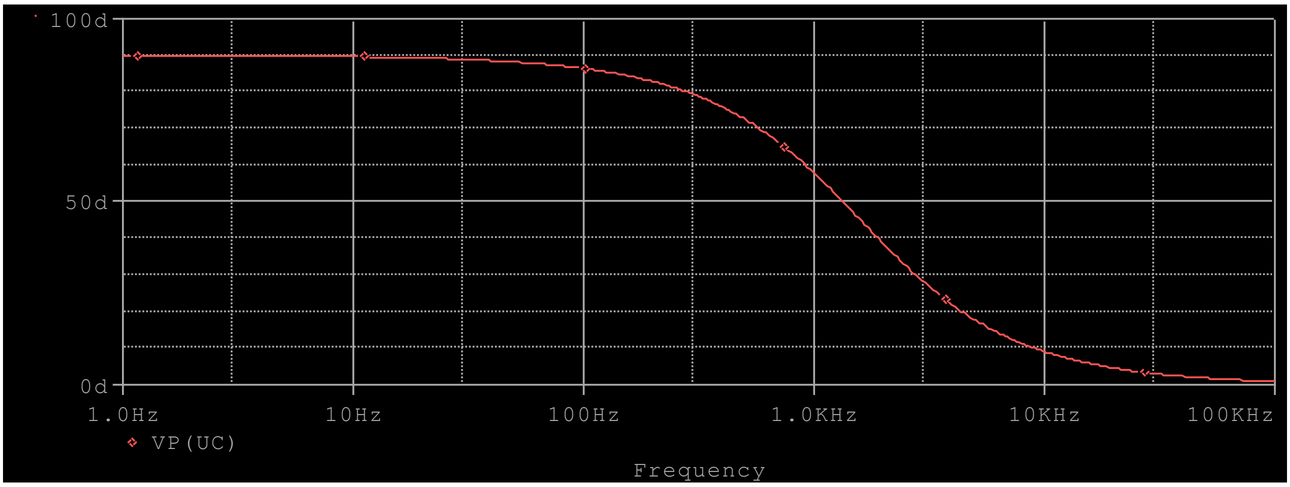
Ved meget lave frekvenser er X_C meget stor i forhold til R, heraf er U_C også stor i forhold til U_R, og fasedrejningen er næsten 90 grader. Ugen er jo konstant, og deles vektorielt af X_C og R.

Ved høje frekvenser er kondensatoren næsten kortsluttet, derfor er U_C lille i forhold til U_R, og fasedrejningen er næsten 0 grader.

Ved lave frekvenser er X_C stor, og der kommer næsten ikke noget ud på Uout. Ved meget høje frekvenser er kondensatoren næsten kortsluttet, og derfor er Uout næsten den samme som Ugen. Høje frekvenser passerer altså næsten uhindret gennem kredsløbet, og deraf navnet "Højpasled".



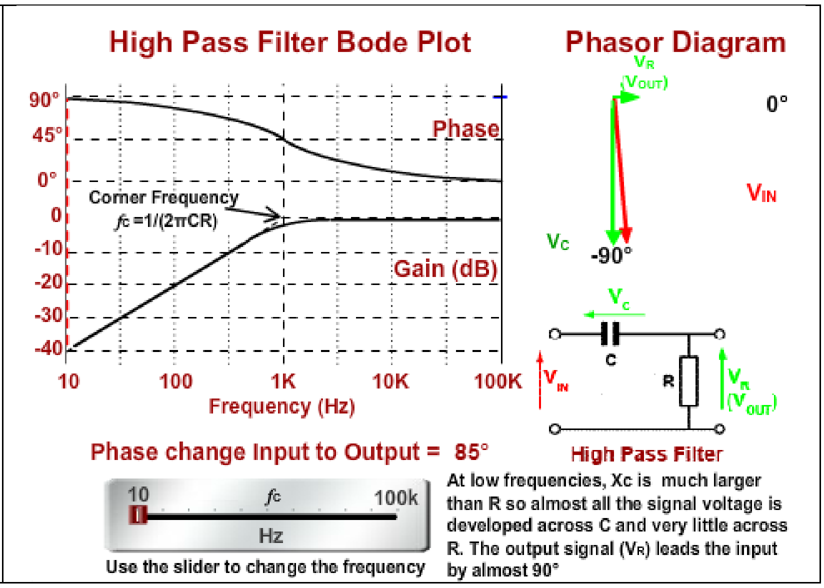




<u>Bodeplot af et højpasled og tilhørende fasedrejning vist med simuleringsprogrammet ORCAD.</u>

VDB er Bodeplot af forstærkningen i dB, som selvfølgelig er under 0 dB.

0 dB er lig 1 ganges forstærkning. VP er udgangsspændingens fasedrejning.



Se animation: http://www.learnabout-electronics.org/ac_theory/filters82.php#lpf

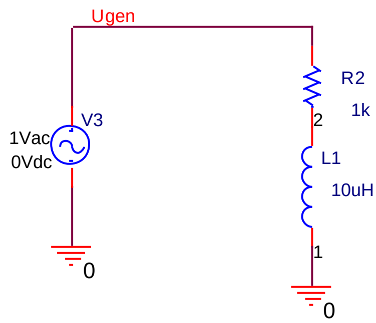
MODSTAND OG SPOLE I SERIE.

$Z_L = 0 + j\omega L$ idet omega = 2*pi*f.

Vektoren starter i origo, og går opad.

Ved en spole i serie med en modstand er strømmen I igen fælles, og afsættes vandret. U_R er i fase med I, og afsættes vandret. U_L er foran strømmen, dvs. afsættes opad.

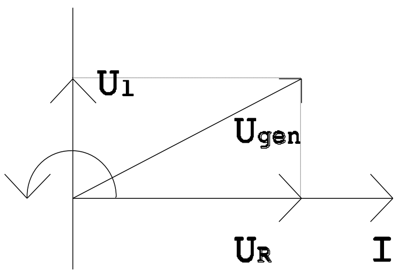
Fasedrejningen "fi" er vinklen mellem strøm og spænding. Modstandstrekanten fremkommer ved at dividere spændingerne med strømmen, der jo er fælles.
R = U/I

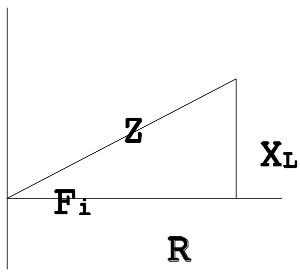


Det ses, at $Z = \sqrt{X_L^2 + R^2}$

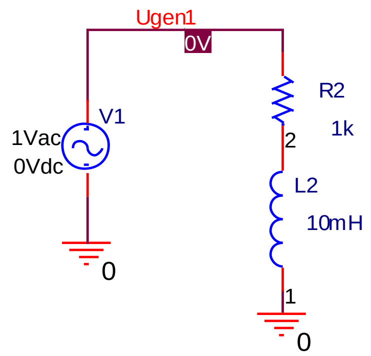
Idet $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ findes, at for

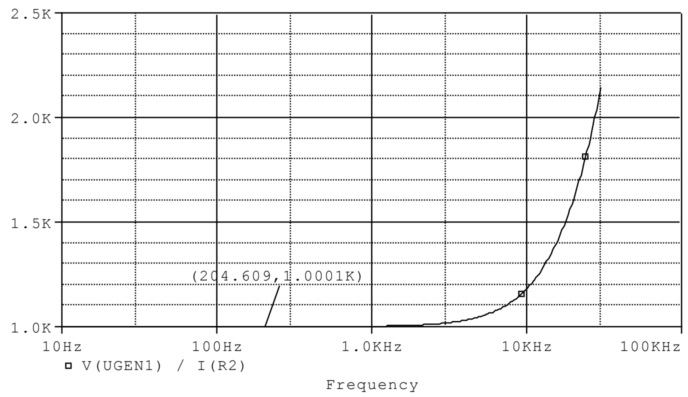
$f \to 0 \Rightarrow X_L \to 0 \Rightarrow Z \to R$





Grafen for Z ser således ud:



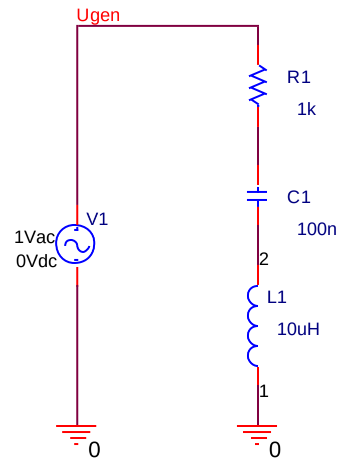


Mangler komplex not.

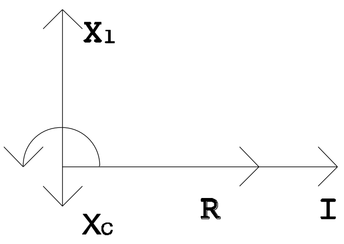
MODSTAND, KONDENSATOR OG SPOLE I SERIE.

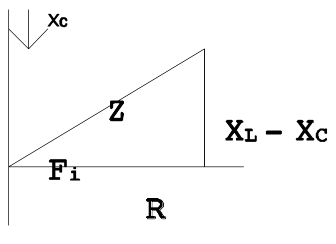
Er der både en kondensator, en spole og en modstand i serie fås idet X_L og X_C er modsat rettede at:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

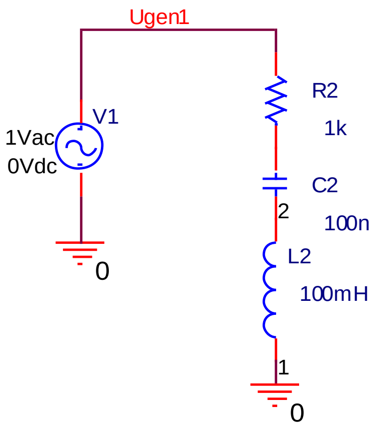


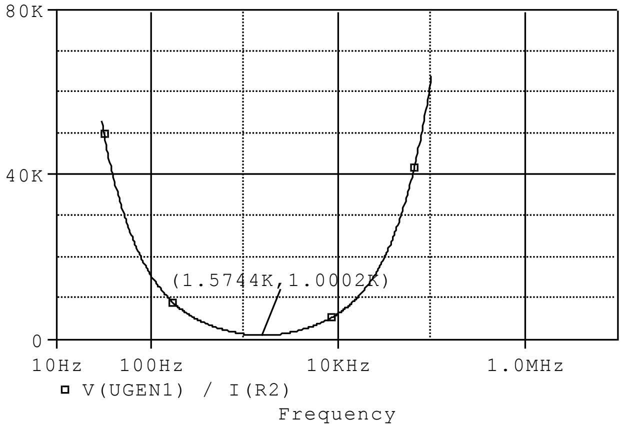
Fasedrejningen "fi" er vinklen mellem strøm og spænding Ugen som også svarer til vinklen mellem Z og R. Ved den frekvens, hvor XC = XL, ophæves de helt. De er jo modsat rettede, og den samlede modstand bliver så rent ohmsk.





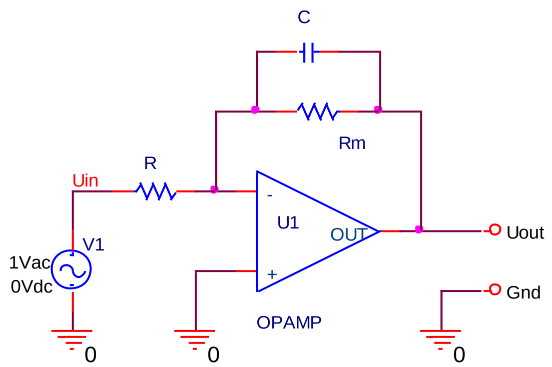
Ved lave frekvenser er kondensatoren en stor modstand. Ved høje frekvenser er det spolen, der yder stor modstand:


Ugen1
R2
1k
V1
1Vac
0Vdc
C2
2
100n
0
L2
100mH
1
0


80K
40K
0
(1.5744K,1.0002K)
10Hz
100Hz
10KHz
1.0MHz
V(UGEN1) / I(R2)
Frequency

OPAMP- forstærker-kobling.

Eksempel med inverterende OP-AMP-forstærker med modstand parallel med kondensator i modkoblings-grenen.



Forstærkningen A` = - $\frac{Rm \| X_C}{R}$ (Rm Parallel med X_C)/ R

(Leddene regnes som komplekse vektorer)

Parallelforbindelsen findes ved at gange de to og dividere med deres sum.

$$A` = -\frac{\dfrac{Rm * \dfrac{1}{j\omega C}}{Rm + \dfrac{1}{j\omega C}}}{R}$$

I tæller ganges for oven og neden med $j\,\omega\,C$

$$A` = -\frac{\dfrac{Rm * \dfrac{1}{j\omega C} * j\omega C}{\left(Rm + \dfrac{1}{j\omega C}\right) * j\omega C}}{R} = \frac{\dfrac{Rm}{1 + j\omega CRm}}{R} = -\frac{Rm}{R} * \frac{1}{1 + j\omega CRm}$$

Der ganges med kompleks konjungerede

$$A` = -\frac{Rm}{R} * \frac{1}{1 + j\omega CRm} * \frac{1 - j\omega CRm}{1 - j\omega CRm}$$

$$A` = -\frac{Rm}{R} * \frac{1 - j\omega CRm}{1^2 + (\omega CRm)^2}$$

Dette opdeles i længde og vinkel: (Polær form !)

$$A` = -\frac{Rm}{R} * \frac{\sqrt{1^2 + (\omega CRm)^2}}{1^2 + (\omega CRm)^2} \angle tg^{-1} - \frac{\omega CRm}{1}$$

Det minus, der står foran udtrykket, kan tolkes som en fasedrejning på 180 grader. Derfor kan ovenstående også skrives:

$$A` = \frac{Rm}{R} * \frac{\sqrt{1^2 + (\omega CRm)^2}}{1^2 + (\omega CRm)^2} \angle tg^{-1}\left(-\frac{\omega CRm}{1}\right) + 180$$

Bodeplot graf for forstærkningen kan findes af $20 \cdot \log_{10}(\mathrm{A}')$

Prøve:

Der undersøges først for frekvensen f gående mod nul, dvs. omega også går mod nul:

$$A` \to \frac{Rm}{R} * \frac{\sqrt{1^2 + 0^2}}{1^2 + 0^2} \angle tg^{-1}\left(-\frac{0}{1}\right) + 180$$

$$A` \to \frac{Rm}{R} * 1\angle 0 + 180 \Rightarrow A` \to \frac{Rm}{R} \angle 180$$

Ved lave frekvenser findes altså, som forventet, at forstærkningen er Rm divideret med R, og fasedrejningen er 180 grader.

Undersøges for frekvensen gående mod uendelig, dvs. at omega også går mod uendelig, fås:

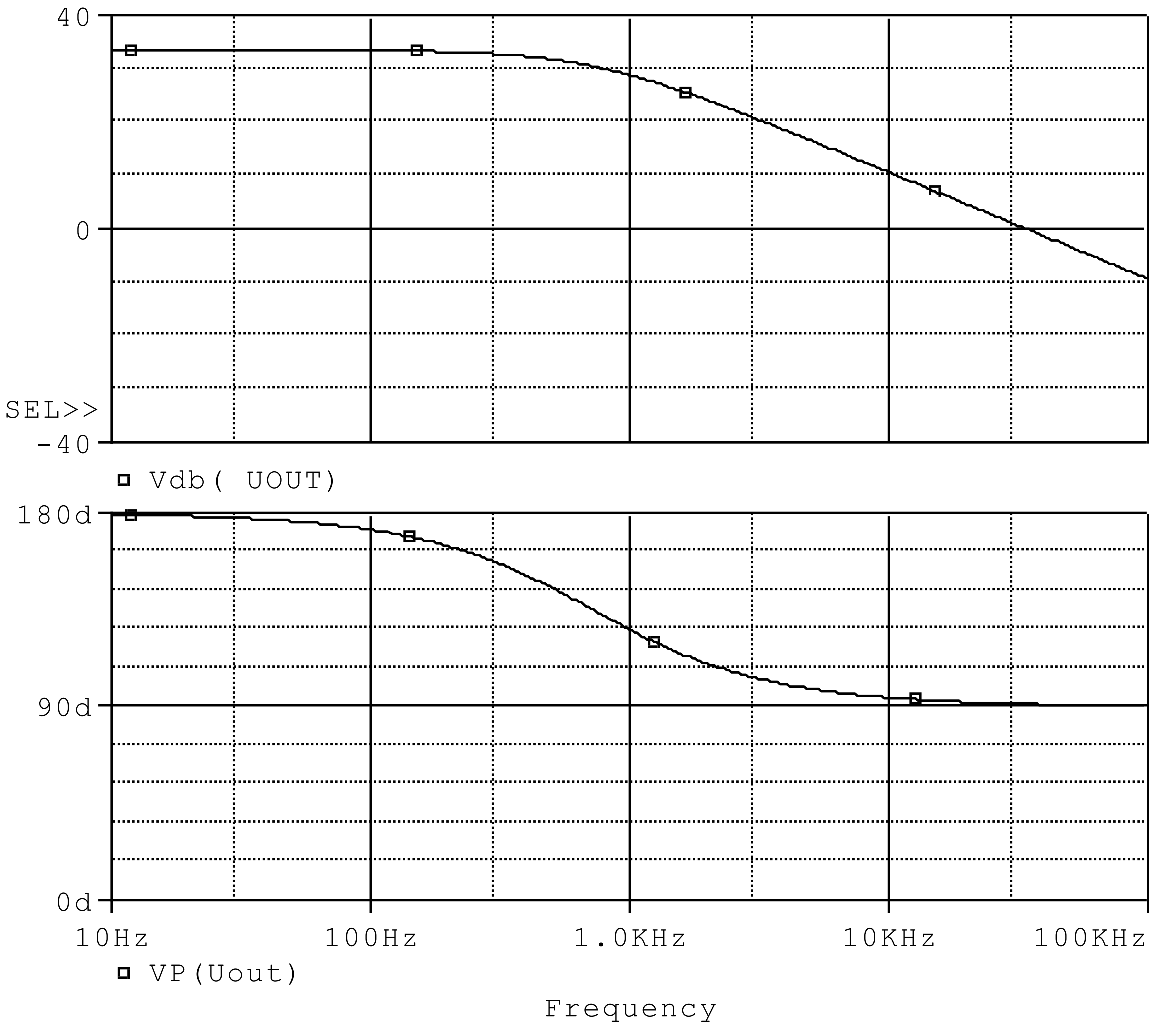
$$A` \rightarrow \frac{Rm}{R} * \frac{\sqrt{\infty^2}}{\infty^2} \angle tg^{-1} - \left(\frac{\infty}{1}\right) + 180$$

$$A` \rightarrow \frac{Rm}{R} * \frac{\infty}{\infty^2} \angle(-90) + 180 \Rightarrow A` \rightarrow \frac{Rm}{R} * 0 \angle -90 + 180$$

Altså $$A` \rightarrow 0 \angle 90$$

Ved høje frekvenser findes altså, igen som forventet, at forstærkningen er faldet meget. X_C er jo meget lille, og fasedrejningen er 90 grader forud.

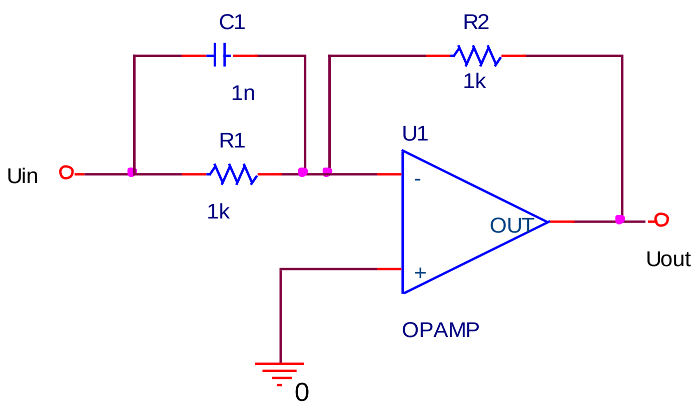
Anvendes for ovenstående op-amp-forstærkerkredsløb flg. værdier, fås følgende graf:
R_m = 470 Kohm, R = 10 Kohm, C = 470 pF



Øverste vises Bodeplot for forstærkningen. Nederste graf viser fasedrejningen. Den starter i 180 grader og ender ved ca. 20 KHz ved 90 grader.
(For endnu højere frekvenser er der indflydelse fra fejl i operationsforstærkeren.)

Inverterende forstærker igen:

Kredsløbet ser nu således ud!



Overføringsfunktionen er: $A' = -\dfrac{R2}{R1 \| Xc}$

Nævneren ganges med jωc $A' = -\dfrac{R2}{\dfrac{R1 \cdot \frac{1}{j\omega c}}{R1 + \frac{1}{j\omega c}}}$

$$A' = -\dfrac{R2}{\dfrac{R1}{1 + j\omega cR1}} \quad \rightarrow \quad A' = -\dfrac{R2 \cdot (1 + j\omega cR1)}{R1}$$

$$A' = -\dfrac{R2}{R1} \cdot \sqrt{1^2 + (\omega cR1)^2} \angle tg^{-1}\left(\dfrac{\omega cR1}{1}\right)$$

Minus tegnet kan opfattes som en fasevinkel på180 grader. Så der fås:

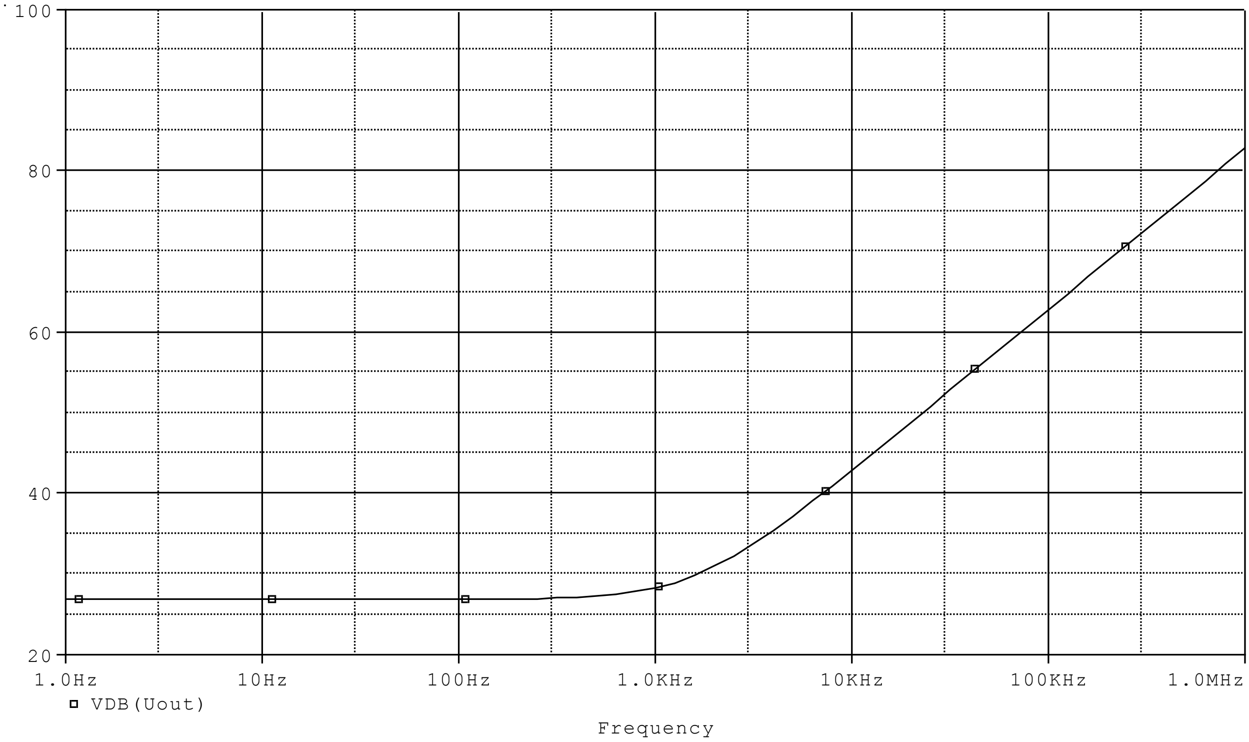
$$A' = \dfrac{R2}{R1} \cdot \sqrt{1^2 + (\omega cR1)^2} \angle tg^{-1}\left(\dfrac{\omega cR1}{1}\right) + 180^\circ$$

Test:

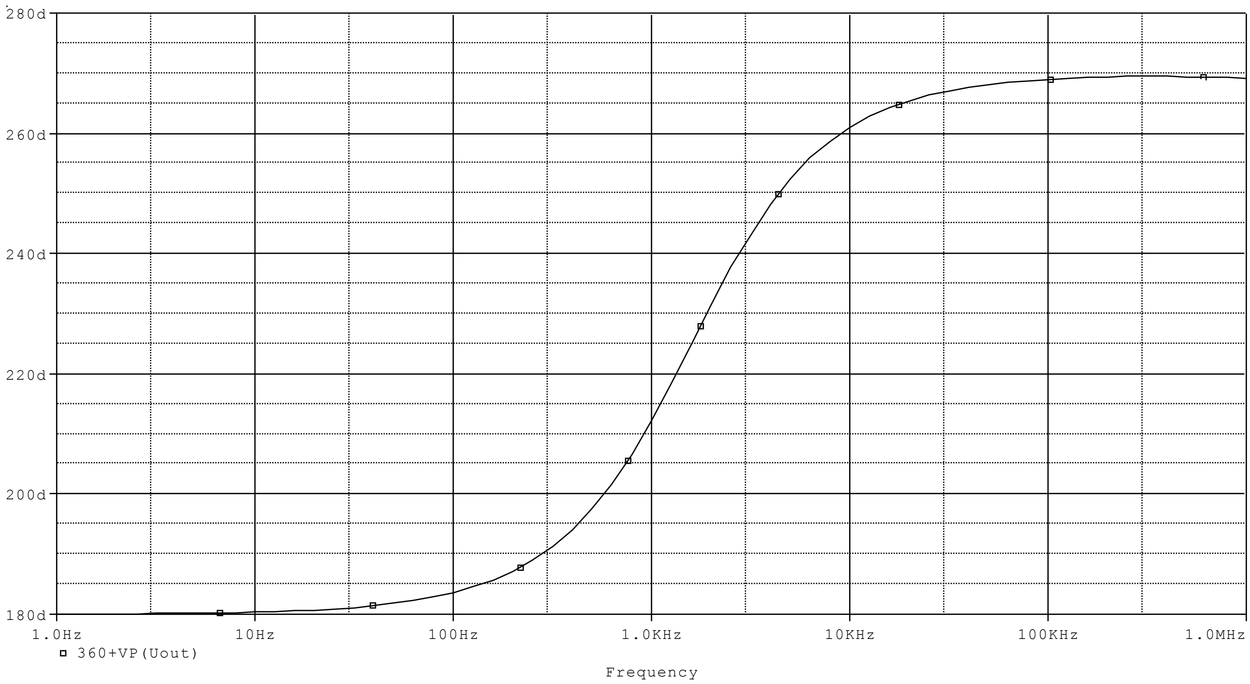
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow A' \rightarrow \dfrac{R2}{R1} \cdot 1 \quad \angle 0 + 180 = \dfrac{R2}{R1} \angle 180^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A' \rightarrow \dfrac{R2}{R1} \cdot \infty \quad \angle 0 + 180 = \dfrac{R2}{R1} \angle\ tg^{-1}(\infty) + 180^\circ = \infty\angle 90 + 180 = \infty\angle 270^\circ$$

Bode Plot:



Og fasedrejningen:



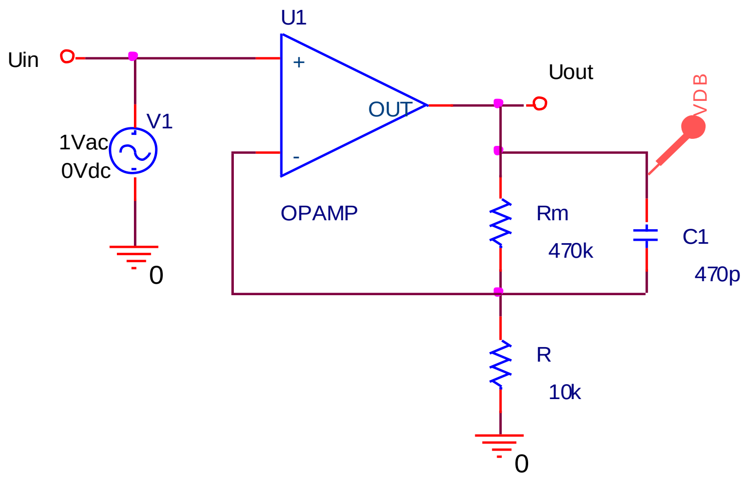
I knækket haves:

$$\omega_{3dB} : R1 = Xc = \frac{1}{\omega c} \Rightarrow$$

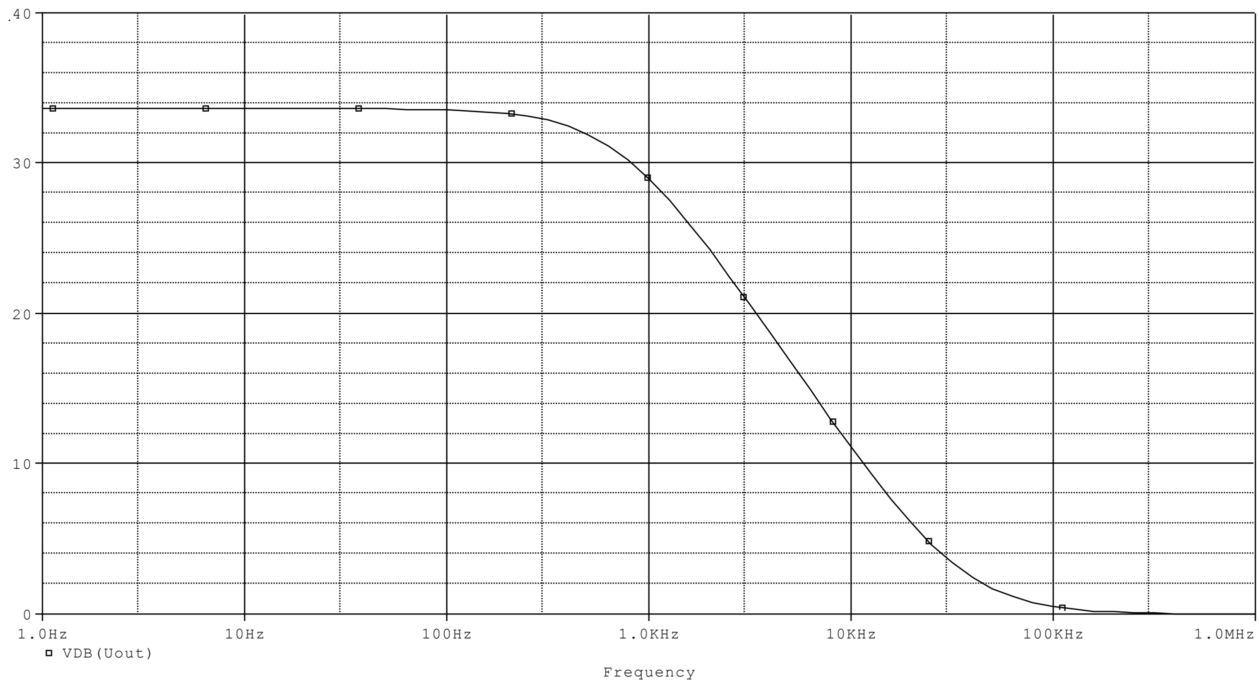
$$A' = -\frac{R2}{R1}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{\omega c}{\omega c}\right)^2}\ \angle \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow \quad A' = -\frac{R2}{R1}\cdot\sqrt{2}\ \angle 45$$

Non inverting amplifier:

Kredsløbet er følgende:



Dets Bode Plot ser således ud !!

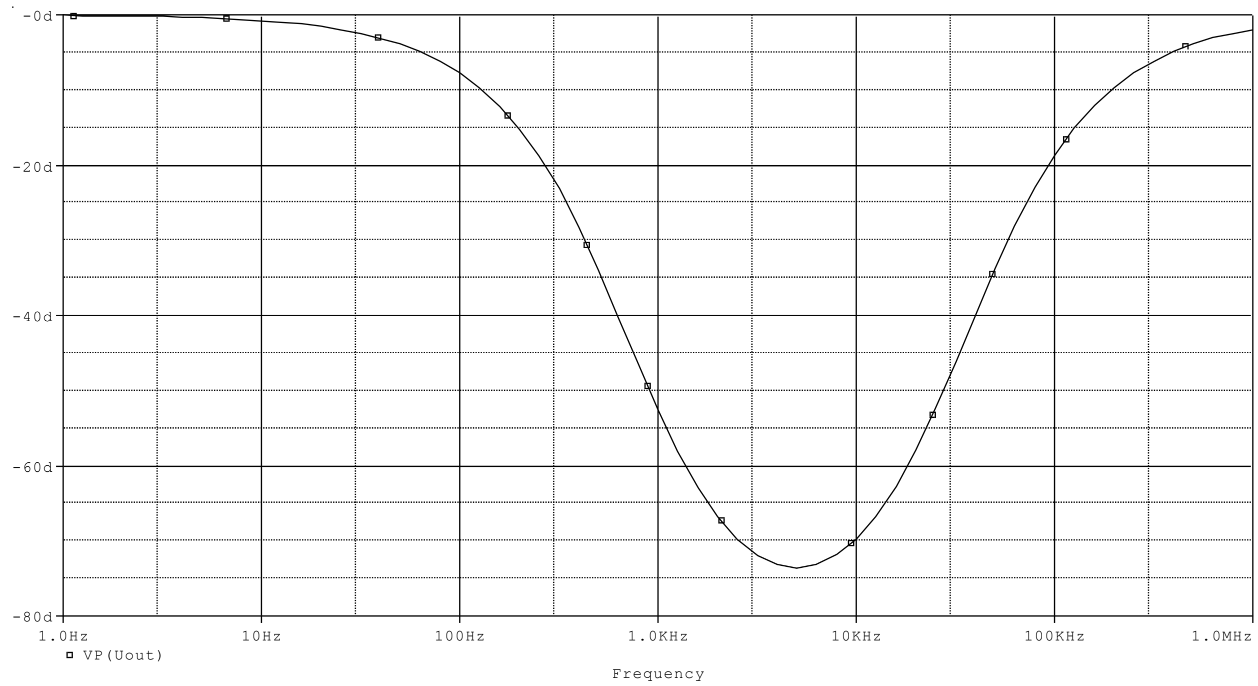


Det ses, at for højere frekvenser går A´mod 0 dB, som er lig en forstærkning på 1 gange.

Dette ses også af overføringsfunktionen: $A' = 1 + \frac{Tæller}{Nævner}$ Tælleren er lig 470 K parallel med 470 pF, og Nævneren er lig 10K.

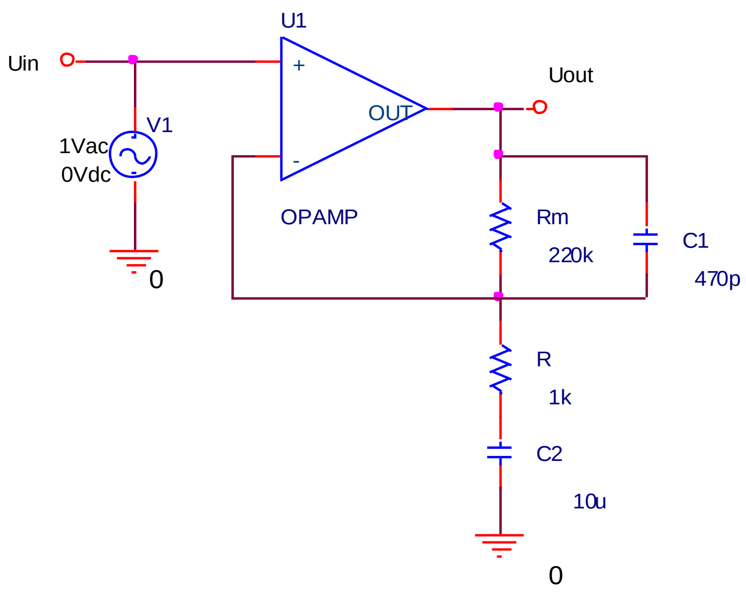
Tælleren bliver ganske vist mindre ved højere frekvenser pga. at kondensatorens mindre impedans kortslutter modstanden, men der er jo stadig et-tallet.

Fasegrafen ser således ud:

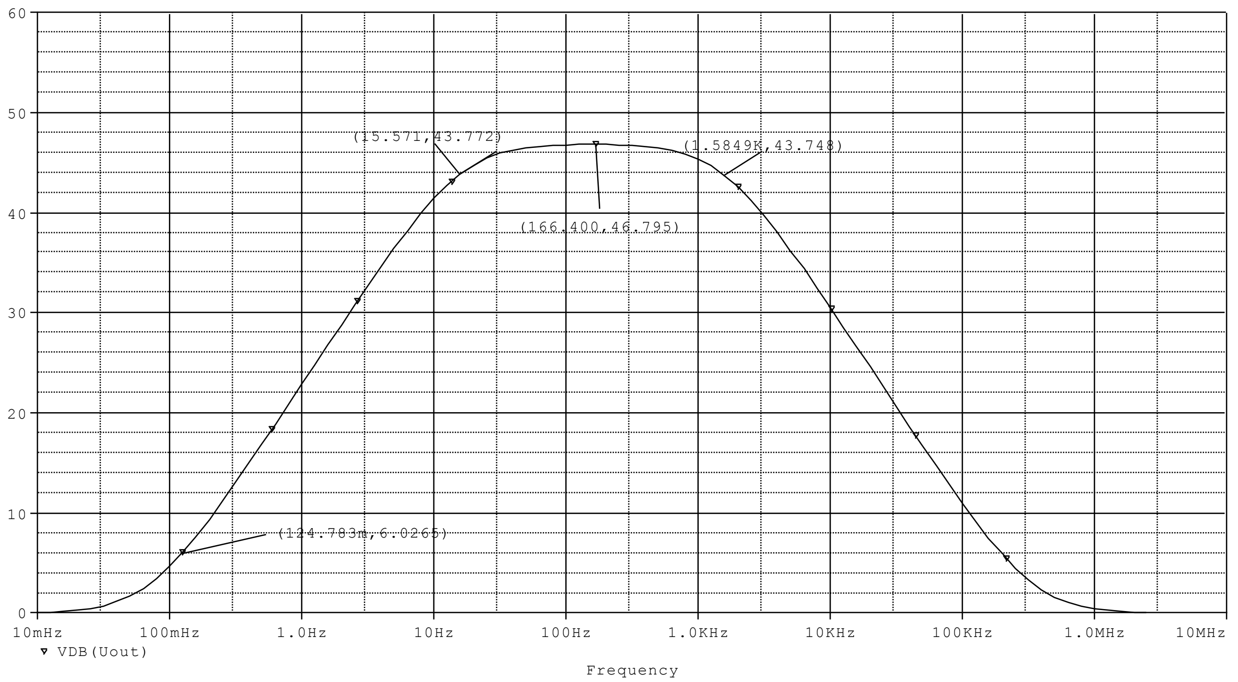


Båndpas forstærker:

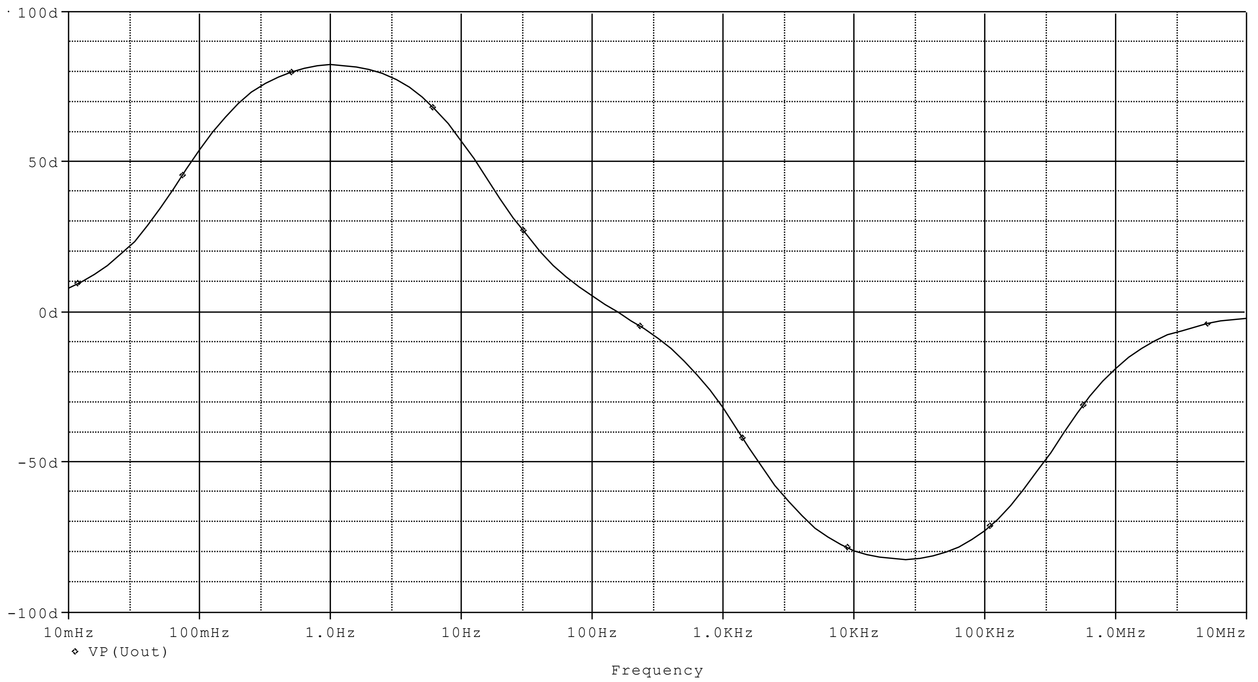
Nu monteres der en kondensator C_2 i kredsløbet, som vist herunder. Den vil optræde i nævneren i overføringsfunktionen.



Bode Plot:



Fasedrejningen er mere kompleks, pga. flere kondensatorer i kredsløbet.

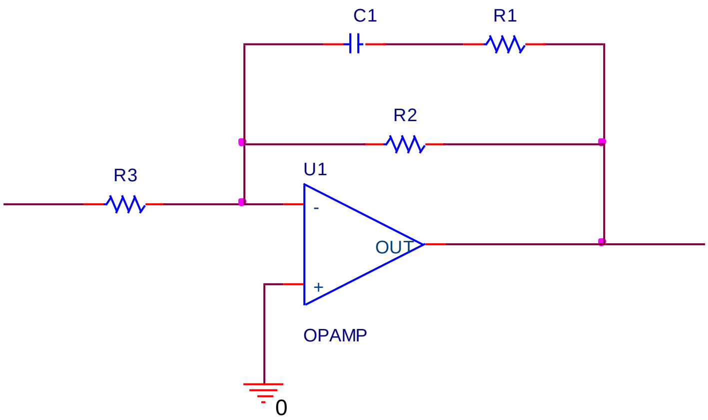


Givet følgende kredsløb:

Inverterende forstærker.

Ved høje frekvenser kortsluttes C1, og forstærkningen må blive

R1||R2 / R3



Der kan opstilles følgende overføringsfunktion:

$$A' = -\frac{\left(\overline{X_C} + \overline{R_1}\right) \| \overline{R_2}}{\overline{R3}} \quad \text{Dette er lig med:} \quad A' = -\frac{\frac{\left(\overline{X_C} + \overline{R_1}\right) \cdot \overline{R_2}}{\left(\overline{X_C} + \overline{R_1}\right) + \overline{R_2}}}{\overline{R_3}}$$

$$A` = -\frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{j\omega C} + R_1\right)}{\frac{1}{j\omega C} + R_1 + R_2}, \quad \text{der kan ordnes til:} \quad A' = -\frac{R_2}{R_3} \cdot \left(\frac{R_1 - j\frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2 - j\frac{1}{\omega C}} \right) \quad (1)$$

$$A' = -\frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{\sqrt{R_1^{\,2} + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle tg^{-1} - \left(\frac{\frac{1}{\omega c}}{R_1}\right)}{\sqrt{\left(R_1 + R_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle tg^{-1} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2}}$$

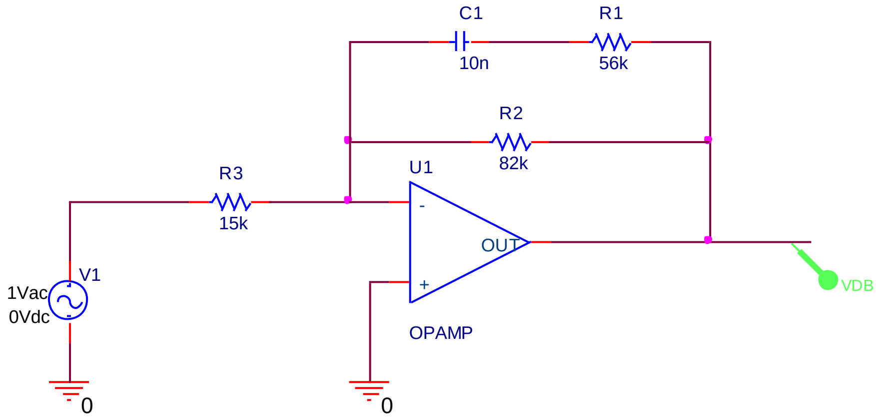
Ligning (1) kunne også omdannes, ved at gange med Omega C i tæller og nævner !!

$$A' = -\frac{R_2}{R_3} \cdot \sqrt{\frac{\left(\omega C R_1\right)^2 + 1^2}{\left(\omega C R_1 + \omega C R_2\right)^2 + 1^2}} \angle - tg^{-1}\left(\frac{1}{\omega C R_1}\right) - tg^{-1}\left(\frac{1}{\omega C\left(R_1 + R_2\right)}\right)$$

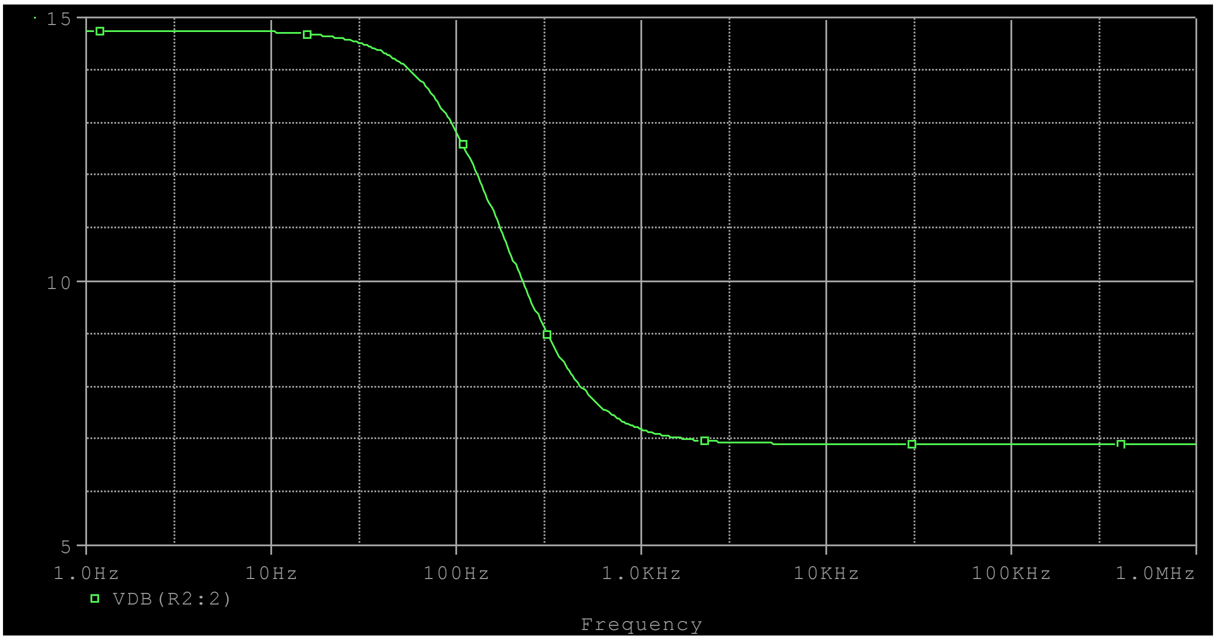
To komplekse tal divideres med hinanden ved at dividere de reelle dele, og subtrahere vinklerne !!

Graferne for bodeplot kan plottes, ved at plotte 20 * $\log_{10}(A´)$ på en logaritmisk X-akse.

Her er et eksempel på et kredsløb med værdier:

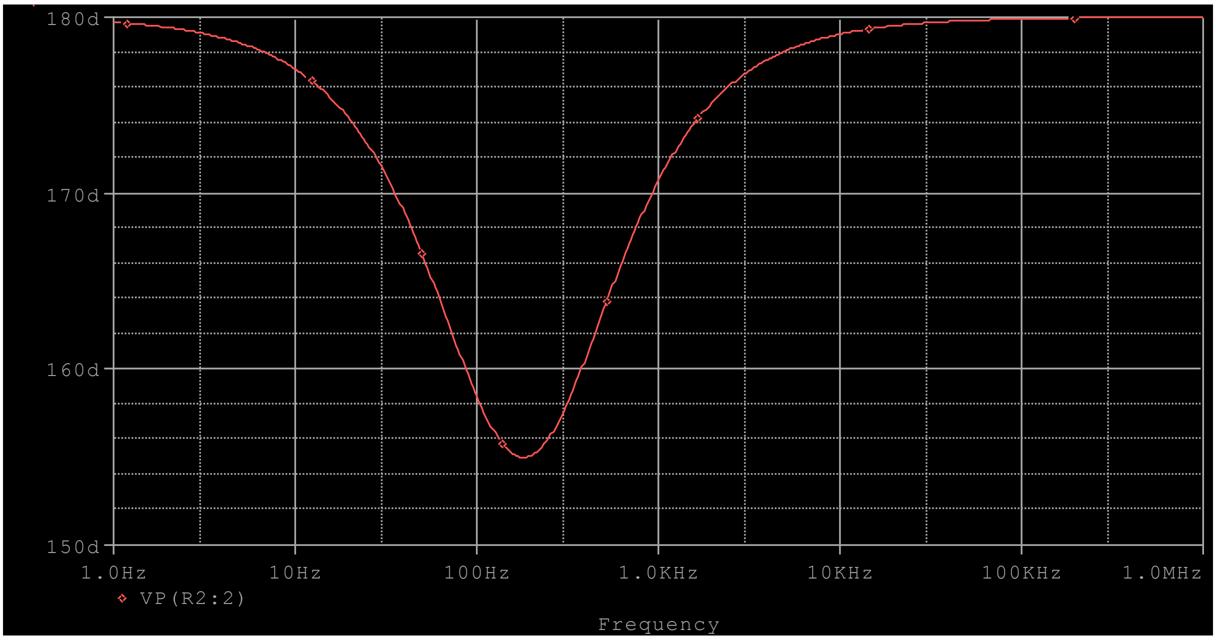


Og Bodeplot for det:



Det ses, at ved høje frekvenser vil kondensatoren kortslutte, og tælleren være de to modstande i parallel. Derfor er forstærkningen lavere ved høje frekvenser !!

Og fasen !!



Regneregler for komplekse tal !!

Først gennemgås her regnereglerne for komplekse tal.

Vektorer i det komplekse plan kan beskrives på to måder. På rektangulær eller polær form.

På rektangulær form angiver man længden ud ad x-aksen og højden op ad eller ned ad den imaginære akse.

På polær form angiver man en vektors længde fra origo (0,0) og en retning i form af vektorens vinkel til x-aksen.

Regnereglerne er forskellige for de to former. De illustreres med bogstav-eksempler og derefter regneeksempler med tal.

Vi tænker os, at følgende vektorer, kaldet K, L og M, eksisterer:

$$K = a + jb, \quad L = c + jd\,, \quad M = e - jf$$

Ved tal-eksempler anvendes:

$$K = 3 + j4 \quad L = 2 + j3$$

og på polær form (se senere om omregning):

$K = 5\angle 53{,}13 \quad L = 3{,}61\angle 56{,}31$ (Udtales: K = 5 vinkel 53,13)

ADDITION

Addition af komplekse vektorer foregår på rektangulær form.

Summen af K og L er:

$$K + L = (a + jb) + (c + jd)$$

De reelle dele adderes for sig, og de imaginære for sig med fortegn.

$$K + L = (a + c) + j(b + d)$$

$$K + M = (a + e) + j(b - f)$$

Et tal-eksempel:

$$K + L = (3 + j4) + (2 + j3) = (5 + j7)$$

SUBRTAKTION

Subtraktion af komplekse vektorer foregår også på rektangulær form.

Differencen mellem K og L er:

$$K - L = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

Reelle dele subtraheres for sig og imaginære dele for sig.

Tal-eksempel:

$$K - L = (3 + j4) - (2 + j3) = (3 - 2) + j(4 - 3) = 1 + j1$$

Addition og subtraktion svarer til at addere og subtrahere vektorer.

MULTIPLIKATION

Multiplikation af komplekse vektorer foregår enten på rektangulær eller polær form.

Rektangulær form:

2 komplekse tal på rektangulær form multipliceres med hinanden så hvert led multipliceres med de andre led, ialt 4 "dele" bliver det til.

$$K = (a + jb), L = (c + jd)$$
$$K * L = a * c + jad + jbc + jj * bd$$

j*j er -1, så derfor fås $K * L = (ac - bd) + j(ad + bc)$

Tal-eksempel:

$$K * L = (3 + j4) * (2 + j3) = 3*2 + j(3*3) + j(4*2) - 4*3$$

$$K * L = -6 + j17$$

Polær form:

Følgende vektorer findes:

$$O = a\angle b, P = c\angle d$$

Vektorerne O og P ganges på polær form ved at gange de reelle dele og addere vinklerne.

$$O * P = (a\angle b) * (c\angle d) = (a * c)\angle(b + d)$$

Tal-eksempel:

$$K = 5\angle 53{,}13$$
$$L = 3{,}61\angle 56{,}31$$

$$K * L = (5\angle 53{,}13) * (3{,}61\angle 56{,}31)$$

$$K * L = 5 * 3{,}61\angle(53{,}13 + 56{,}31) = 18{,}03\angle 109{,}44$$

Omregnes til rektangulær form, fås når den polære vektor opløses i komposanter på den reelle og imaginære akse (x og y-akse):

$$K * L = 18{,}03 * \cos(109{,}44) + j18{,}03 * \sin(109{,}44)$$

$$K * L = -6 + j17$$

DIVISION

Rektangulær form:

Division på rektangulær form er noget besværligt.

Enten omregnes det komplekse tal til polær form, som ovenfor, eller der bruges en omskrivning af udtrykket vha. "den kompleks konjugerede". Herved kan der i stedet anvendes multiplikation. Den kompleks konjugerede er det komplekse tal spejlet i X-aksen.

$$K = (a + jb), L = (c + jd)$$

$$\frac{K}{L} = \frac{(a + jb)}{c + jd}$$

(c + jd) i nævner omdannes ved at der ganges med den kompleks konjungerede i tæller og nævner.

$$\frac{K}{L} = \frac{(a + jb) * (c - jd)}{(c + jd) * (c - jd)} = \frac{ac - jad + jbc - jjbd}{cc - jcd + jcd - jjdd}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Dette opdeles til 2 brøkstreger:

$$\frac{K}{L} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Tal-eksempel:

$$\frac{K}{L} = \frac{3 + j4}{2 + j3} = \frac{3 + j4}{2 + j3} * \frac{2 - j3}{2 - j3} = \frac{6 - j9 + j8 - jj12}{4 - j6 + j6 - jj9}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{18 - j5}{13} = \frac{18}{13} - j\frac{5}{13}$$

Division på polær form:

På polær form udføres division ved at dividere de reelle dele og subtrahere vinklerne.

$O = a\angle b, P = c\angle d$

$\frac{O}{P} = \frac{a}{c}\angle(b-d)$

Tal-eksempel:

$K = 5\angle 53{,}13 \quad L = 3{,}61\angle 56{,}32$

$\frac{K}{L} = \frac{5\angle 53{,}13}{3{,}61\angle 56{,}31} = \frac{5}{3{,}61}\angle(53{,}13 - 56{,}31) = 1{,}38\angle -3{,}18$

Omregning fra rektangulær til polær:

Vektoren $K = a + jb$ omregnes til længde og vinkel:

$K = \sqrt{a^2 + b^2}\angle tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

For taleksemplet findes:

$K = \sqrt{3^2 + 4^2}\angle tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 5\angle 53{,}13$ grader.

Og tilbage igen, idet vektorens projektion på den reelle og imaginær-akse findes:

$K = 5 * \cos(53{,}13) + j5 * \sin(53{,}13)$

$K = 5 * 0{,}6 + j5 * 0{,}8 = 3 + j4$